

文章编号: 0258-1825(2020)01-0001-08

# 关于旋涡定义的思考

吴介之\*, 杨越

(北京大学 工学院 湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京 100871)

**摘要:**针对旋涡定义这个长期未解决的难题,在分析历史上提出的几种思路的基础上,本文提出:定义旋涡的总目标,应当体现其管状运动形态,并与其作为流体运动肌腱的动力学功能有机结合;该定义应能以统一的方式覆盖经典涡动力学业已成熟的结果,并且指引对湍流中复杂涡状结构及其相互作用的识别。据此,本文根据涡量场演化的已知规律,提出了旋涡的一个动力学定义,作为继续深化讨论的参考。同时提出,人们针对湍流结构研究构造的各种涡判据,虽然对湍流涡状结构的可视化起了重要作用,但因其难以遵循管式涡量场的因果演化而无法取代完备的涡定义。相比之下,近十年来形成的涡量面理论,有望在未来发展中使旋涡的定义和检验问题回归涡量动力学的自然规律。

**关键词:**旋涡;涡动力学;涡定义;涡判据;湍流结构

中图分类号:V211.3

文献标识码:A

doi: 10.7638/kqdlxxb-2019.0171

## Thoughts on vortex definition

WU Jiezhì\*, YANG Yue

(State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems,  
College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract:** Aiming at the long unsolved issue of vortex definition, this article reviewed critically those historically appeared definitions, and thereby proposes that the general goal of vortex definition should reflect an inherent combination of the solenoidal nature of vortices in kinematics and their role as the sinews and muscles of fluid motion in dynamics. The definition should, in a unified manner, cover all mature achievements of classic vortex dynamics and guide the identification of complex vortical structures and interactions in turbulence. Thus, on the basis of the known evolution laws of vorticity field, we propose a dynamic definition of vortices as a reference of further discussion. Although various “vortex criteria” constructed for visualizing turbulent structures have played important role in one’s understanding, they cannot replace a complete vortex definition since they do not follow the causal evolution rules of the solenoidal vorticity field. In contrast, it is expected that the vorticity-surface theory formed in the past decade will, in its future development, be able to bring the definition of vortex and its testing back to the natural laws of vorticity dynamics.

**Keywords:** vortices; vorticity and vortex dynamics; vortex definition; vortex criteria; turbulent structure

## 0 引言

根据动量方程的 Helmholtz 分解可以发现,单一性质的流体运动有两个基本动力学过程:以涡量为特征变量的横过程即剪切过程,和以胀量或热力学变量

(压力、密度、焓、熵)为特征变量的纵过程即胀压过程(Wu et al. 2015)<sup>[1]</sup>。纵过程的特征结构很清晰:声波、激波以及势流,它们有明确的数学定义。纵场理论的难点在于其特征量不唯一,对这些结构的数学描述与源的辨识也不唯一。横过程则与此恰恰相反。其

收稿日期:2019-12-13; 修订日期:2019-12-24

基金项目:国家自然科学基金(11472016)

作者简介:吴介之\*(1940-),男,广东肇庆人,教授,硕士,主要从事复杂流动多过程分解耦合研究. E-mail: jie\_zhi\_wu@163.com

引用格式:吴介之,杨越.关于旋涡定义的思考[J].空气动力学学报,2020,38(1):1-8. doi: 10.7638/kqdlxxb-2019.0171 WU J Z, YANG Y. Thoughts on vortex definition[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2020, 38(1): 1-8.

特征量和数学描述唯一,但偏偏其最重要的基本结构——旋涡或涡,没有公认的定义。这已成为流体力学的一个老大难问题。本文在回顾经典定义演化过程的基础上,对“什么是涡”这个问题提出自己的初步看法,抛砖引玉,以期促成更广泛的讨论。

## 1 涡的运动学定义及其动力学功能

横场有一个独特的纯运动学性质,即涡量场的无散性。它的直接结果是三维无界流场的总涡量守恒和二维流场的总环量的时间不变性。特别对于涡量管,它导致 Helmholtz 第一涡量管定理(简称 H1):涡量管的强度或其环量与管面上计算它的位置无关(不同著作对 Helmholtz 三个涡量管定理的编号与说法不同,这里据 Truesdell (1954)<sup>[2]</sup>)。无散性决定了“涡”(vortex)最根本的普适形态特性,是自 Helmholtz 以来人们把细涡量管称为涡丝并简称为涡的原初依据,业已指引人们理解了若干重要的物理现象。最著名的经典事例来自空气动力学。对于二维流,Prandtl 从翼型突然起动形成的起动涡,根据总环量守恒推断出产生升力的等值反号的翼型环量(图 1)<sup>[3]</sup>,而这个环量只能是翼型上下表面边界层内涡量的代数和。对于三维流,Lanchester 最先根据 H1 从翼尖涡推断出它们必然来自机翼表面边界层里的涡量在翼尖附近的汇聚和折转(图 2a)<sup>[4]</sup>,这启发 Prandtl 在 1918 年基于 H1 提出了升力线理论的涡系模型(图 2b)。没有涡量的无散性,这些认识是不可能的。

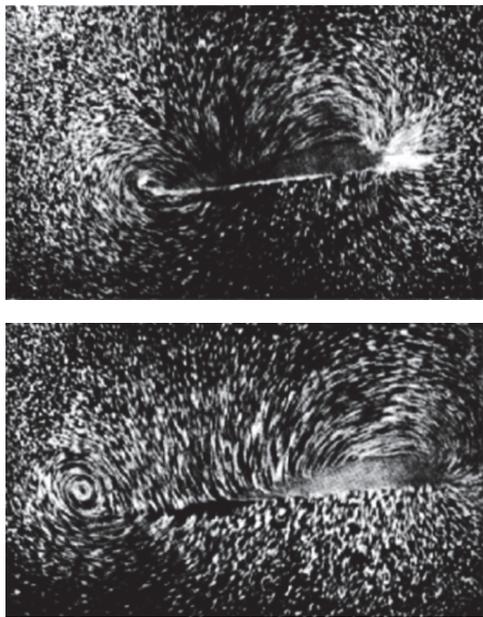
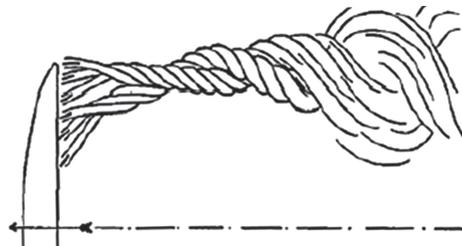
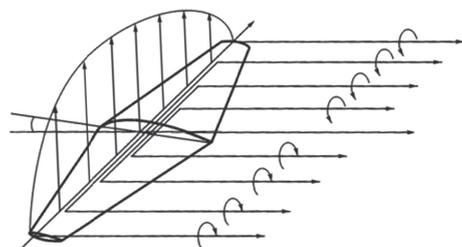


图 1 从左向右突然起动的翼型的起动涡和升力涡<sup>[3]</sup>  
Fig.1 The starting vortex and lifting vortex formed during the suddenly started motion of an airfoil from left to right.  
From Tietjens & Prandtl (1934)<sup>[3]</sup>

更一般地说,如果某一时刻在流场某处产生了新的涡量场,则必在同一时刻会在流场别的地方产生新的总量相同、方向相反的涡量场,无论这两处涡量场中的一个或两个是否发展成集中的旋涡。



(a) 尾涡形成 (Lanchester, 1907)<sup>[4]</sup>



(b) Prandtl 升力线理论的涡模型

图 2 三维尾涡

Fig.2 Three-dimensional wake vortices

从涡量场的无散性到涡定义,却是一段坎坷的历程。回顾过去,可看到四种不同的思路。

### 1.1 基于涡量管的运动学定义 (Helmholtz-Lamb)

从 Helmholtz (1858) 把细涡量管称为涡丝 (vortex filament), 而后 Lamb (1932) 把涡丝简称涡 (vortex) 开始, 人们就用细涡量管即涡丝 (vortex filament) 定义旋涡(参见 Wu, 2018<sup>[5]</sup>)。这是涡定义的一个主流方向,因为它抓住了 H1 所体现的涡量场作为无散管式场 (solenoidal field) 的特性。但这个运动学定义并不完备。首先, Helmholtz 和 Lamb 并未规定该细涡量管之外有没有涡量。设有一族连续分布于空间的涡量线,从空间中任何不是涡量线的闭曲线出发均可生成一个涡量管。由于在这条闭曲线的邻域还可引入无限多与之不相交或相交的闭曲线(如奥运会的五环会标),从这些环又可生成一系列涡量管,或者互不相交如一套涡量管,或者相互嵌套的涡量管。但这样生成的结构显然不唯一,不能把一组涡量管中的任何一个识别为通常意义下的旋涡。

其次,人们通常认为,根据 H1,在无界流体中涡量管和涡线一定闭合成环,并据此讨论过大量物理问题。但 Fuente (2007)<sup>[6]</sup>举例证明,涡量线和涡量管并非如人们常说的那样要么自行封闭要么延伸到流体边界。涡量线可能无穷长但局限于有限空间,或者在流体内部终止于零涡量点;而依其生成闭曲线的不

同, 涡量管可以自行封闭, 也可以是无穷长而且自相交无数次, 但不封闭。可见, 任意选定的涡量线和涡量管的拓扑结构并不简单。

事实上, 基于涡量管的纯运动学定义的确是不充分的, 因为严格的不可压流模型也有无散性, 其流管也满足 H1; 而且若流动无黏, Helmholtz 第二、三涡量管定理(H2, H3)对流管也成立。但除了计算流量之外这些流管并无其他重要特性。

### 1.2 基于流动有旋性的定义 (Kelvin-Saffman)

和上述基于涡量管的主流定义不同, Kelvin (1869, p.225)<sup>[7]</sup>在关于涡运动的经典论文中提出, “I now define a vortex as a portion of fluid having any motion that it could not acquire by fluid pressure transmitted through itself from its boundary.”意思是, 旋涡是一团任意运动的流体, 该运动并不来自从其边界传输过来的流体压力。显然, 这部分流体只能理解为整个涡量场。这个定义排除了不可压流的流管。Saffman & Baker (1979)<sup>[8]</sup>给出的涡定义实际上是 Kelvin 定义的某种直白说法: 旋涡是被无旋流包围的一个有旋流体。由于涡量场的管式特性, Kelvin-Saffman 定义实际上指的是最大可能的涡量管, 其侧面就是一个有界涡量场的外边界。此定义的好处是, 前述涡量管定义的不唯一性问题, 以及任选的涡量线与涡量管的复杂拓扑结构问题, 就都不存在了。

然而, 如果任何一个有界的涡量场都能被整个定义为一个旋涡, 这和人们的直观理解相去甚远。于是, 为避免过于宽泛, Saffman (1992)<sup>[9]</sup>又补充说, 涡主要指无旋流包围的细涡丝。值得注意的是, 当 Kelvin 提出他的涡定义时, 隐含地用到无旋流中联系压力和动能的 Bernoulli 定理。而这个定理已经属于动力学, 但却在 Saffman 的定义中被忽略了。

### 1.3 涡的功能性刻画

由上可见, 单靠涡量场的无散性或者流体的有旋性来定义涡, 都是不充分的。它们无法解释, 为什么并不是所有细涡量管或有旋流都具有必须给以特殊关注的特性。例如, 在小雷诺数下忽略惯性力的定常 Stokes 流中, 压力的梯度(除以黏性系数)和涡量的旋度互相平衡, 在二维流中它们无非是一个复解析函数的实虚部(Wu et al. 2006, p.151)<sup>[9]</sup>, 虽然人们总可以画出许多涡量管, 却没有一个能被称为涡; 而作为有旋流的整个流场也不具有任何旋涡的意义。为了定义涡, 必须进入动力学, 而且不能像 Kelvin 那样简单地用是否满足 Bernoulli 定理作为判据。

在这方面, Küchemann (1965)<sup>[10]</sup>沿着人们对涡的物理直觉迈出了重要的一步。他全然不顾涡的运

动学定义, 提出了涡是“流体运动的肌腱”这个著名命题。随后 Moffatt, Kida & Ohkitani (1984)<sup>[11]</sup>又把这句话延伸到湍流, 认为被拉伸的涡是湍流的“筋”(sinews)。这就在实际上给出了一个阐明涡的功能的形象化判据, 它强调了只有强到足以成为肌腱的细管状结构才够格被称为涡。这个命题符合人们的物理直觉, 因而得到广泛的认可。但涡在什么意义下能成为流体运动的肌腱? 这个问题也只能到动力学中去寻找答案。

### 1.4 基于旋转度量的涡判据

在经典涡动力学中, 旋涡的理论模型总以孤立的形态出现, 或者是无穷长的单个或一对直涡, 或者是涡环。这种理论模型在湍流研究中不够用了, 而代之以复杂的、相互纠缠和相互作用的各种“相干结构”或“涡状结构”(vortical structures)。虽然人们确信这些结构都来自涡量场, 但长期无法给出它们的明确定义, 而只能用不同实验手段、在不同阶段和条件下观察到的现象, 对这些结构给出瞎子摸象式的形象化名称。这种状况导致了各种“涡判据”的诞生。

早先, Truesdell (1954, Secs. 51-62)<sup>[2]</sup>基于涡量是有量纲的量这个事实, 提出了需要一个无量纲的数来度量流体运动旋转程度的问题 (“to find a quantitative measure of the amount of rotation in a motion”)。他基于 Helmholtz 分解(他根据历史的考察称之为 Cauchy-Stokes 分解), 用涡量与应变率张量的两次缩并之比定义了运动学的涡量数(vorticity number), 并用 Lamb 矢量的绝对值和物质加速度扣除 Lamb 矢量后的绝对值之比定义了一个动力学的涡量数。前者已成了研究湍流相干结构时引入的各种“涡判据”(如见 Epps, 2017)<sup>[13]</sup>的滥觞。这些运动学判据实质上都对涡的强度给出了规范。虽因相互有别而导致对同一结构有不同理解, 但它们对于可视化湍流中复杂的涡状结构毕竟起了重大作用, 做出了不可替代的贡献。在公认的更好且易用的高效涡识别方法出现之前, 这些判据还将较长时间发挥作用。但它们和涡定义不属于同一个概念(Wu 2018)<sup>[5]</sup>。从运动学上看, 现有的判据都和涡量场的管式特性无关, 识别出来的结构都不满足 H1。满足 H1 的一个必要但远非充分的条件是(Wu et al. 2005)<sup>[14]</sup>, 涡不能因轴向拉伸(导致涡量管变细、涡量强度与卷吸的动能增加, 但保持环量沿管子不变)而被不合适的判据拉断。根据 Kolář & Šístek (2019)<sup>[15]</sup>最近的检验, 在几个常用的判据中只有称为 Rortex 的判据(如 Gao & Liu 2018)<sup>[16]</sup>能满足这个必要条件。然而, 即使拉不断, Rortex 的外边界仍未必能近似保持涡量

场无散性导致的管状性质。

从动力学上看,这些判据最根本的缺陷,是它们不能统一地揭示涡状结构演化中不同时刻可识别结构之间的因果关联。它们是时空中孤立的存在,不是涡量场本身演化的运动学-动力学规律的自然结果,也就无法由之导出各种极有价值的经典涡结构模型及其动力学理论,例如边界层、面涡、涡丝、点涡、涡斑(vortex patch)等等。比如 Prandtl 升力线理论的机翼束缚涡和线化自由尾流面涡这样简单的理论模型(图 2b),乃至涡动力学中所有业已证明有效的简化模型,都是用这些判据难以得到的。

可以看到,上述前三个思路虽然都不完备、不充分,却各自抓住了涡的某个方面的特征。一个好的涡定义应当把这些特征有机地整合起来。关键词是管状、强旋转。需要把“肌腱”这种形象化的描述改造成精炼而完整的物理理论概念,即进一步阐明什么样的细涡量管能“升级”成流体运动的肌腱。而为此就得解释它们从何而来、到何处去的动力学来源与演化。同时,作为管和“肌腱”,就只能包括“轴状涡”。有了好的定义之后,发展量化的识别判据就有了明确的目标和方向。

总之,涡量场的无散性和  $H1$  是任何旋涡必备的独特运动学形态,但基于涡量管的纯运动学涡定义并不充分,还必须体现旋涡作为流体运动肌腱的独特动力学功能,而只顾及动力学功能而不顾  $H1$  的定义也是不充分的。因此,定义旋涡的总体目标应当是:(1) 能将体现其管状的运动学形态与肌腱的动力学功能有机统一;(2) 能以统一的方式覆盖经典涡动力学业已成熟的结果,并且指引对湍流中复杂涡状结构及其相互作用的识别。

下面是我们沿着这个总体思路的一个初步探索。本文所用的论证材料大多可在 Wu et al.<sup>[1,9]</sup>中找到。

## 2 有效无黏流:从面涡到旋涡

先从雷诺数趋于无穷的有效无黏流说起。这时,涡量场的基本形态是无限薄面涡(vortex sheet,或称涡片),即切向间断面。可能是 Prandtl 最早提出了面涡会卷绕成轴状旋涡的思想。Kaden (1931)<sup>[17]</sup>首先用二维流证明,一个有边界的面涡,如果它在边界上的涡量是非零有限值,就会“诱导”面涡迅速卷绕成很紧并不断伸长的旋进(spiral in)单螺旋结构。随卷绕层数增加、层间距离和每层面涡的强度趋于零,这个结构的横截面形成卷紧的闭圈(图 3)。

这种机制已由大量实验证实。据此,Betz<sup>[18]</sup>令人信服地论证:在外无界的小黏性不可压流体中,旋

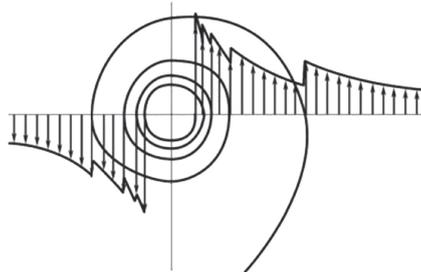


图 3 一端有界的面涡卷绕, (Betz, 1950<sup>[18]</sup>)

Fig.3 The rolling-up of a semi-ininitely extended vortex sheet (Betz, 1950<sup>[18]</sup>)

涡只能来自面涡卷绕。他先假定,如果在静止流体中搓一根细圆柱令其旋转,最后把圆柱取出,那么在无限大雷诺数下旋转圆柱得用无限大的时间才能完全带动流体转动,而且其动能需要无穷大的功率输入。而事实是一块平板一动,边缘就搓出面涡,快速卷绕而成旋涡。Betz 的这个论证解释了从飞机到昆虫的定常与非定常空气动力学中遇到的各种旋涡的形成。从 Krasny(1987)<sup>[19]</sup>发明消除奇异性的数值研究开始,这些螺旋状结构已经被陆续用不同的方法证实,数值方法先是针对二维流,后来拓展到轴对称流和一般三维流。

此外,人们还从实验、理论和计算中发现,一个两端无限长的平直面涡,也会因 Kelvin-Helmholtz 不稳定性而非线性地形成旋进-旋出(spiral in and out)的双螺旋结构,而形成一个涡列(图 4)。在一般的情况下,二维面涡的这种自诱导性质服从高度非线性的 Birkhoff-Rott 奇异积分-微分方程。值得强调的是,面涡卷绕成集中涡这个机制,是在 Helmholtz 的工作 70 多年之后发现的,代表了人们对涡结构认识的重要进展。

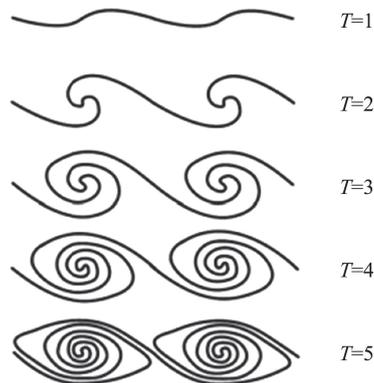


图 4 受扰无限长面涡因 Kelvin-Helmholtz 不稳定性 and 自诱导而发展成卷绕涡列 (Krasny, 1988<sup>[19]</sup>)

Fig.4 The evolution of disturbed infinitely extended vortex sheet into rolled-up vortex array due to Kelvin-Helmholtz instability and self-induction (Krasny, 1988<sup>[19]</sup>)

对三维流,一个轴状涡一旦形成,背景流场沿轴向的加速度就会导致涡的拉伸而使其所含的拟涡能

指数加强。这是独立于卷绕的另一个强化旋涡的运动学机制。浴盆中携带涡量的流体在出口处由于重力加速度的拉伸作用而形成的浴盆涡就是这种机制的一个简单而常见的例子。更重要的典型例子,是积雨中由斜压效应产生的强烈翻滚的有旋流体由于上冷下热的强对流而拉出的龙卷风(图 5)。在地面上的飞机发动机形成的小型龙卷风状旋涡也源于类似的机制。这种热对流和地球旋转的科氏力与风切变的相互作用,还能形成更大尺度的台风甚至飓风。

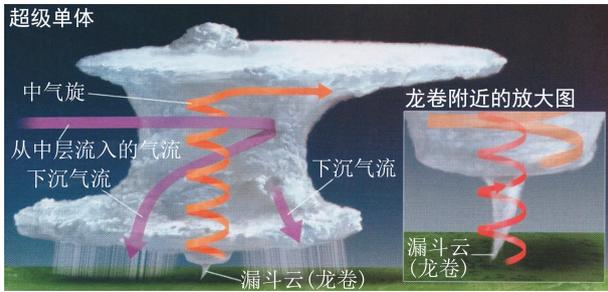


图 5 积雨云和龙卷风<sup>[20]</sup>

Fig.5 Cumulonimbus and tornado<sup>[20]</sup>

连续性方程的运动学效应和动量方程不同分量间耦合的动力学效应显示,涡的轴向拉伸往往伴随着向心的径向速度,导致周围流体被卷并到旋涡中而形成动能的集聚,使旋涡成为流动的组织者。这正是涡之所以成为流体运动的肌腱的重要原因。当然,涡的轴状运动学形态也正是筋与肌肉的形态。

在湍流中,涡因拉伸而加强只是个大概率事件,有时也会因相反的轴向加速度导致轴向收缩、旋涡变粗和涡量密度减弱。但沿轴向挤压一根细橡皮棍最容易导致的结果是,一个微小的非轴对称扰动就把皮棍挤弯;同样,在有轴向挤压的背景场中,旋涡发生弯折也是比它单纯变粗的概率大得多的事件。只要把一条直涡丝弯成 U 状,其两条平行反号的腿所诱导的动能必定大为减小。因此,Chorin (1994)<sup>[21]</sup>指出:由于能量守恒,涡的拉伸必然伴随着它的弯折。在涡丝动力学中,弯折的涡丝要沿副法线方向运动,主控方程是局部诱导近似的非线性薛定谔方程。而涡丝的拉伸和弯折本身则涉及非局部自诱导和背景流效应,主控方程是更复杂的积分-微分方程 (Wu et al. 2006, 401-407;413-418)<sup>[9]</sup>。

现在,如果我们把图 4 那个最初平直的无限长面涡换成复杂的曲面,并把流动换成三维的,则可以想象这样的不稳定曲面也大量存在于图 5 的积雨云内部的湍流中。这里既有面涡的卷绕效应,又有轴状涡的拉伸效应和折转效应,其复杂程度可想而知,而在低空显得极为强烈的龙卷风,也只是这庞大的积雨云

的一个小尾巴,是个有一定概率的事件。

值得注意的是,在有效无黏流中,面涡卷绕的最终结果不会是闭合涡量管,而是无限多层紧密卷绕的螺旋结构,它和涡量管的拓扑性质还是不同的,所以 H1 用不上。另一方面,这个螺旋结构的轴心是条直径无限小的奇异线,那里的周向速度和动能趋向无穷大。如果奇异线是弯曲的(通常必然如此),它还会有无穷大的自诱导速度。这两个问题只能靠引入黏性才能解决,讨论如下。

### 3 黏性的作用和 Moore-Saffman 尾涡模型

真实的流体都有黏性,引入黏性表明问题进入了动力学。黏性有几个方面的作用。首先,面涡变成有限厚度的剪切层,但这个厚度必须足够薄才能使剪切层发生卷绕。剪切层这样的结构只在小黏性流体或大雷诺数流动中才出现。这是旋涡出现的一个必要的动力学条件。其实纵场的结构也是如此。很黏的流体既没有旋涡,也没有长程声波和激波。换言之,纵横场的结构都是由大雷诺数动力学过程决定的。

黏性的第二个作用,是消除前述卷绕面涡不可避免的奇异性。在大雷诺数下,剪切层的厚度为  $O(Re^{-\frac{1}{2}}L)$  的量级,  $L$  是整体长度尺度。涡层卷得越紧,其强度也随之减小,涡量分布和速度分布越趋向光滑,如图 3 所示。当相邻剪切层间的距离小到每层的厚度这个量级时,卷绕结构就变模糊,退化为环量  $\Gamma = O(1)$  的黏性涡量管,特征雷诺数是  $Re = \Gamma/\nu \gg 1$ 。

黏性的第三个作用,是不仅使 Helmholtz 第 2、第 3 涡量管定理失效,而且在抹光卷绕面涡轴心的奇异性的同时,也使管状涡核失去了清晰的外边界。所以,这样得到的旋涡,乃至涡量场本身,本性上就是没有清晰外边界的黏性结构,正如边界层和自由剪切层没有清晰的外边界一样,有的只是指数衰减的“尾巴”(所以边界层厚度的定义不唯一)。顺便提一句,黏性激波层也是这种物理上紧致的结构,但激波层没有自诱导,不会卷成螺旋而已。这样一来,我们不得不承认,涡核的外边界是个有限厚度的“外壳”,大体上对应于从核内切向速度单调增长转变成在核外势流中代数衰减的过渡层(参见图 7a)。Saffman 在和本文第一作者的一次交谈中(约为 1994 年)也承认,他把涡定义为无旋流包围的有旋流体,只适用于无黏流,在黏流中涡量场没有清晰的外边界。下面,我们姑且把作为涡核外边界的有限厚度的“外壳”称为准涡量管。这里重要的是,在准涡量管内必存在满足 H1 的严格涡量管,在每个瞬间其环量沿管不变。

为了具体理解在黏性流体中涡层卷绕成轴状涡并形成光滑涡核的过程,不妨回顾 Moore 和 Saffman (1973)<sup>[22]</sup>根据 Kaden 相似律,针对飞机尾涡结构提出的飞机尾涡模型(简译 MS 模型)。尾流面涡从后缘起的三维定常卷绕过程可按  $x \cong Ut$  化简为一个横流截面上的二维非定常问题。首先考虑初始时刻在  $(x, y)$  平面上的一个位于从机翼左端起  $y > 0$  的半无穷大平直涡,强度分布为  $\gamma_0(x) \sim y^{-n}$ ,  $n \in [0, 1]$  ( $n = 0.5$  代表环量有椭圆分布)。则这个面涡会因自诱导而迅速卷起,在极坐标  $(r, \theta)$  下可用量纲分析证明卷紧的结构服从 Kaden 相似律 ( $\beta$  是个常数):

$$\gamma = \left( \frac{\beta t}{\theta - \theta_0} \right)^{\frac{1}{1+n}} \quad \text{as } \theta \rightarrow \infty$$

Moore 和 Saffman 用渐近匹配展开证明,尾涡有个三层状的核结构:最外层是松散的无黏卷绕面涡,可用 Kaden 相似律定义一个核半径  $a_0$ ;内层是黏性子核以消除切向速度的奇异性,半径为  $a_{\text{vis}}$ ;中间是从卷绕面涡过渡到黏性子核的光滑无黏区,其外边界为  $a_{\text{sm}}$ 。见图 6。

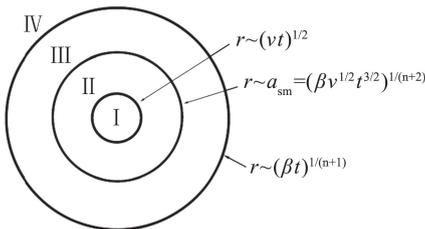


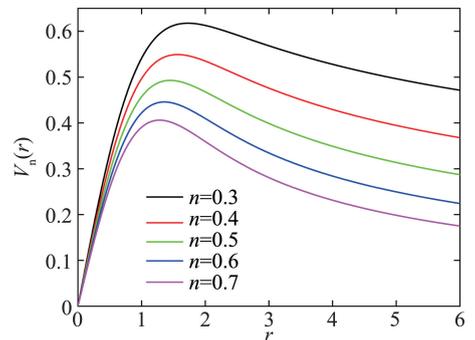
图 6 Moore-Saffman 尾涡模型的核心结构

Fig.6 Core structure of Moore-Saffman trailing vortex model

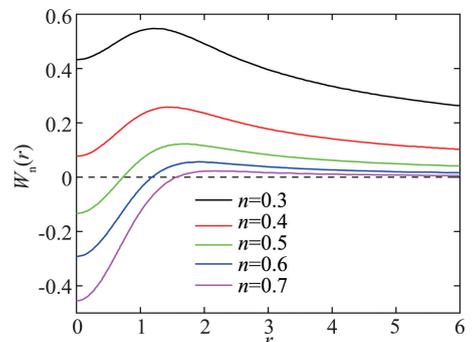
MS 模型包含了轴向压力梯度引起的拉伸-收缩作用。据其算得的尾涡周向速度  $V$  与轴向速度  $W$  的剖面取决于机翼载荷参数  $n$  (见图 7),该参数决定着轴向流的分布和正负号(射流型还是尾流型)。这个模型的预测结果已被一些实验所证实。

当然,MS 模型不能直接搬到其他旋涡上。但是其定性的物理特征具有普遍意义。首先,它体现了 Betz 的论断,即只有小黏性流体中的涡层卷绕才能形成旋涡;其次,它证实构成旋涡的闭合涡量管不是任何运动学意义下的涡量管,而是涡层卷绕与黏性扩散相抗衡的产物,由于卷绕过程把大片面涡携带的涡量集聚到狭小的管状区域内,这种涡量管的涡量的确有流体运动肌腱的强度。在  $t = O(1)$  时,黏性子核半径  $a_{\text{vis}} = O(Re^{-1/2})$  处的切向速度达  $v = O(Re^{1/2})$ 。由于周向速度和轴向速度的动力学耦合(参见 Wu et al. 2015, Eq. (6.4.8))<sup>[1]</sup>和质量守恒,这种强涡量管能把周围流体卷吸过来而成为动能高度集聚的结构。第三, H1 对光滑核内的流体成立,这对于旋涡

定义是十分必要的。对于椭圆载荷分布,在  $t = O(1)$  时光滑核半径为  $a_{\text{sm}} = O(Re^{-1/5})$ ,其内有闭合涡量管。第四,它揭示了卷绕之前的剪切层强度分布对整个旋涡性态的影响。这些特性是旋涡的大多数理论模型所没能做到的。值得一提的是,在湍流级串过程中,这种卷绕结构也是小尺度间歇性的来源。Lundgren (1982)<sup>[23]</sup>首次证明,带旋臂的拉伸涡模型的系综平均具有  $-5/3$  的能谱。与此相反,由于湍流研究中构造的各种涡判据只能辨识轴状结构,都不可能揭示剪切层卷绕成涡的过程,必然对 MS 模型和 Lundgren 模型掐头去尾。



(a) 周向



(b) 轴向

图 7 Moore-Saffman 尾涡模型的周向与轴向速度分布  
Fig.7 Profiles of circumferential and axial velocities of Moore-Saffman trailing vortex model

## 4 旋涡的一个动力学定义

作为对以上三节讨论结果的概括,如果要写一个“旋涡”的词条,我们可以试着给旋涡下一个新的动力学定义:

旋涡,或简称涡,是有旋流体在各种运动学效应和大雷诺数动力学效应下,通过剪切层卷绕和涡量拉伸自组织成的管状结构。它们在流体运动中导致动能向其周围的高度集聚,起着肌腱的作用。

如果再多说一点,可以加上:其光滑涡核中的涡量管满足 Helmholtz 第一定理,在其自身演化 and 与其他流动结构相互作用的过程中,每个旋涡都经历从生

成到消亡的过程。

这个定义排除了 Helmholtz-Lamb 基于涡量管的运动学定义所过多包含的东西,而添加了作为流体运动肌腱的动力学机制,包括黏性的必要性。定义本身无需列入各种运动学和动理学的具体效应以及它们发生的具体条件和流动参数范围。这些具体化的分析是需要 在 词 条 的 定 义 之 后 阐 明 的。我 们 期 望,基 于 这 些 分 析,能 够 证 明 这 个 定 义 涵 盖 了 过 去 150 年 来 所 有 人 们 称 之 为 旋 涡 的 横 场 结 构 的 共 同 特 征,包 括 航 空 航 天、流 体 机 械、风 工 程、大 气、海 洋 等 自 然 界 和 工 程 技 术 领 域 遇 到 的 旋 涡 和 湍 流 中 的 涡。否 则,定 义 还 需 修 改。

在 本 文 第 一 作 者 过 去 的 论 著 中,曾 或 隐 或 显 地 把 旋 涡 分 类 成 层 状 涡,即 剪 切 层 和 轴 状 涡。现 在 看 来 这 个 分 类 不 妥,因 为 没 有 卷 绕 的 层 状 涡 不 具 有 管 状 结 构。除 非 硬 把 剪 切 层 中 的 任 何 运 动 学 意 义 下 的 涡 量 管 都 算 进 去,否 则 它 与 Helmholtz 三 定 理 无 关。上 述 定 义 廓 清 了 剪 切 层 和 旋 涡 之 间 的 因 果 关 系,把 前 者 视 为 旋 涡 形 成 前 的 结 构 形 态 看 来 更 为 贴 切。换 言 之,上 述 旋 涡 的 动 力 学 定 义 只 适 用 于 轴 状 涡。

值 得 强 调 的 是,这 个 动 力 学 定 义 并 不 要 求 旋 涡 必 须 闭 合 成 环。一 个 非 环 状 旋 涡 可 以 只 有 有 限 长 度,在 其 一 端 或 两 端 打 开 成 非 卷 绕 或 弱 卷 绕 的 剪 切 层。一 个 重 要 的 典 型 例 子 是 图 4 的 龙 卷 风,其 底 部 和 顶 部 散 开,涡 量 线 在 底 部 折 向,平 行 于 地 面 进 入 边 界 层,涡 量 管 呈 喇 叭 状 扩 大;在 顶 部 拐 进 猛 烈 翻 滚 的 复 杂 云 层。正 是 这 个 底 部 和 顶 部 的 边 界 条 件 决 定 了 大 气 剪 切 层 为 何 能 卷 绕 成 龙 卷 风,而 这 个 过 程 迄 今 也 没 彻 底 澄 清,使 得 龙 卷 风 的 预 报 仍 是 个 难 题。另 一 个 例 子 是 机 翼 前 缘 涡,它 由 前 缘 分 离 的 剪 切 层 卷 绕 而 成,有 上 游 端;在 下 游 遇 到 后 缘 附 近 的 逆 压 梯 度 会 经 历 高 度 非 线 性 的 失 稳 过 程 突 然 破 裂、散 开,并 转 换 成 湍 流,故 也 有 下 游 端。这 也 是 一 个 有 限 长 的 旋 涡。这 种 有 限 长 旋 涡 的 两 端 演 化 在 传 统 模 型 中 是 无 法 描 绘 的,上 述 定 义 应 当 有 助 于 推 动 人 们 更 多 地 关 注 旋 涡 形 成 或 终 结 的 过 程。轴 状 涡 的 这 种 有 限 长 度,也 使 只 能 识 别 轴 状 涡 的 所 有 判 据 不 可 能 分 辨 涡 的 来 龙 去 脉。

有 件 事 需 要 解 释:因 为 允 许 涡 量 管 打 开 成 非 管 状 的 涡 量 面,在 大 多 数 实 际 情 况 下 几 乎 无 法 实 际 检 验 构 成 有 限 长 旋 涡 的 所 有 运 动 学 涡 量 管,包 括 它 们 在 旋 涡 端 部 的 延 伸,是 否 满 足  $H1$ 。对 这 个 困 惑 有 个 简 单 的 回 答——不 必 检 验,只 要 真 正 抓 住 了 涡 量 线、涡 量 面 和 涡 量 管,知 道  $H1$  在 理 论 上 必 然 满 足 就 够 了。再 去 检 验  $H1$  就 有 可 能 不 必 要 地 陷 入 复 杂 的 几 何 拓 扑 问 题,而 这 些 纯 几 何 的 复 杂 性 并 不 影 响 本 文 关 于 涡 定 义 的 讨 论。

作 为 一 个 一 般 的 概 念 定 义,上 述 涡 的 动 力 学 定 义

应 能 涵 盖 所 有 的 旋 涡,既 包 括 湍 流 中 复 杂 的 旋 涡,又 包 括 空 气 动 力 学、地 球 流 体 力 学 等 领 域 观 察 到 的 孤 立 旋 涡,所 以 也 需 要 受 到 这 两 类 领 域 典 型 事 例 的 检 验。其 实,这 个 动 力 学 定 义 本 来 就 是 对 经 典 旋 涡 理 论 与 实 验 结 果 的 概 括,可 以 认 为 它 已 经 得 到 了 这 类 事 例 的 检 验(若 有 差 误,定 义 还 应 修 改)。目 前 需 要 进 一 步 做 的,是 用 湍 流 中 的 复 杂 涡 状 结 构 来 检 验 它。在 这 种 检 验 过 程 中,人 们 已 经 遇 到 经 典 孤 立 旋 涡 案 例 所 观 察 不 到 的 若 干 新 现 象 需 要 解 释,例 如 涡 对 的 重 联;也 还 将 会 继 续 发 现 新 的 现 象,如 涡 相 互 作 用 引 起 的 级 串(Yao & Hussain, 2020<sup>[24]</sup>)。这 些 发 现 都 将 导 致 涡 动 力 学 的 丰 富 和 继 续 发 展。

## 5 涡量面理论的意义

为 检 验 第 4 节 的 动 力 学 定 义,对 计 算/实 验 流 体 力 学(CFD/EFD)方 法 有 个 基 本 需 求——能 跟 踪 大 雷 诺 数 下 薄 剪 切 层 的 拉 格 朗 日 演 化 与 扩 散,及 涡 量 管 的 拉 伸、折 转 与 相 互 作 用。更 一 般 地 说,至 少 对 低 马 赫 数 流,需 要 CFD/EFD 具 有 模 拟 复 杂 流 场 中 涡 量 的 产 生 及 其 运 动 学-动 力 学 演 化 和 相 互 作 用 的 能 力。对 经 典 旋 涡 案 例 来 说,这 个 需 求 已 可 满 足,但 尚 无 系 统 的 验 证。而 对 湍 流 中 的 复 杂 结 构,还 需 要 CFD/EFD 有 进 一 步 的 重 大 发 展。

前 面 提 到 的 面 涡 即 切 向 间 断 面 这 个 简 化 概 念,在 有 限 的 大 雷 诺 数 下 变 成 剪 切 层 或 涡 层,而 一 个 涡 层 无 非 是 一 族 无 限 多 个 涡 量 面,它 们 的 动 力 学(运 动 学 和 动 理 学)演 化 完 整 地 刻 画 着 涡 层 的 演 化,包 括 其 可 能 的 卷 绕 成 旋 涡 的 过 程。在 CFD 中,一 个 涡 量 连 续 分 布 的 剪 切 层 总 要 离 散 化 为 一 族 强 度 足 够 小 的 面 涡,每 个 这 样 的 面 涡 就 是 一 个 涡 量 面,其 中 最 需 要 关 注 的 是 代 表 稳 定 性 理 论 判 定 的 最 早 失 稳 的 临 界 层 的 那 个 涡 量 面。因 此,对 典 型 涡 量 面 演 化 过 程 的 DNS 研 究,开 辟 了 对 各 种 相 干 结 构 给 出 统 一 物 理 解 释 的 重 要 方 向。这 个 研 究 方 向 始 于 Yang & Pullin (2010)<sup>[25]</sup>。

这 个 方 向 近 10 年 来 取 得 了 可 观 的 进 展。Zhao 等(2016, 2018)<sup>[26-27]</sup> 初 步 算 出 了 边 界 层 中 精 心 选 定 的 初 始 平 直 涡 量 面 如 何 在 适 当 扰 动 下 失 稳 而 拱 起 来 并 逐 步 卷 成 准 周 期 发 卡 涡 列 的 过 程;槽 道 流 中 上 下 壁 面 形 成 的 发 卡 涡 如 何 相 互 作 用 而 重 联;发 卡 涡 的 尾 部 如 何 形 成“条 带”结 构;多 个 发 卡 涡 的 后 期 演 化 如 何 导 致“猝 发”和“湍 斑”,等 等。这 就 初 步 实 现 了 原 来 的 各 种 碎 片 化 认 识 在 理 性 基 础 上 的 统 一。的 确,由 于 对 剪 切 层 和 旋 涡 相 互 关 系 有 清 晰 的 表 述,上 述 旋 涡 的 动 力 学 定 义 在 追 踪 涡 量 面 演 化 的 过 程 中 得 到 了 很 好 的 印 证。发 卡 涡 就 是 开 放 涡 量 面 卷 成 的 有 限 长 旋 涡。它

的头和腿是卷紧的旋涡,脚是开放涡量面。

我们说“初步”,因为只跟踪了极少数涡量面,其行为未必能代表该涡量面所属的整个剪切层(剪切层的边缘也是模糊的);而且黏性扩散使涡量面不能保持为同一物质面,数值上准确追踪这样的涡量面非常困难。尽管现在误差可控制在5%以下,但它在复杂湍流中或许有时足以使追踪偏离到另一个涡量面上去了。由于这些局限,目前涡量面理论的计算结果尚未非常清晰地解读湍流中复杂涡结构的相互作用图景。但无论如何,涡量面理论开辟了一个回归到涡量动力学的正确方向,其今后发展应注重描述代表剪切层的一族涡量面。事实上,Zhao等(2018)<sup>[28]</sup>已作出一定尝试,即利用体渲染的方法绘制一族涡量面来显示转捩中复杂的湍斑结构,如图8所示。

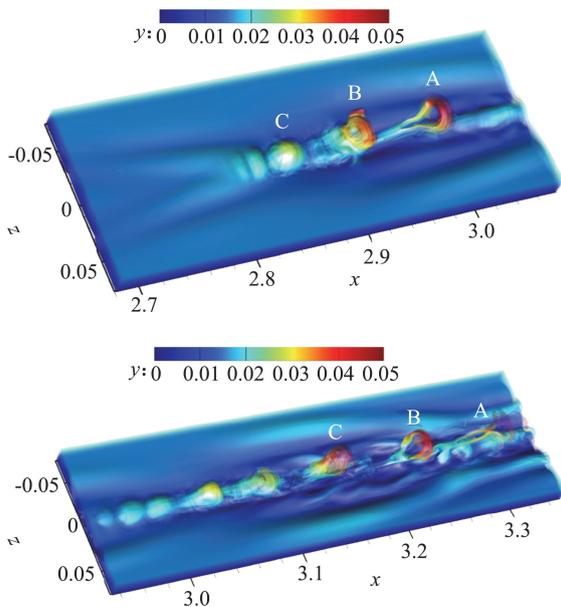


图8 用一族涡量面算出的发卡涡列的形成与演化<sup>[28]</sup>

Fig.8 The formation and evolution of a series of hairpin vortices, computed by a set of vorticity surfaces<sup>[28]</sup>

## 6 结 语

旋涡是流体运动横过程的典型结构,其发生和演化过程及其对整个流动的影响,应当根据而且只能根据涡动力学(关于横过程及其与纵过程相互作用的理论)来解释。其定义也必能在涡动力学框架内改进和完善。本文提出的动力学涡定义方案是这个信念下的一个尝试,和CFD中涡量面理论的概念与方向相契合,也应对涡量面理论的未来发展有所启示。

致谢:感谢高安康博士对本文初稿的有益讨论。

## 参 考 文 献:

[1] WU J Z, MA H Y, ZHOU M D. Vortical flows[M]. Springer, 2015.

[2] TRUESDELL C. The kinematics of vorticity[M]. Bloomington: Indiana University Press, 1954.

[3] PRANDTL L, TIETJENS O G. Applied Hydro- and Aeromechanics[M]. McGraw-Hill, 1934.

[4] LANCHESTER F W. Aerodynamics[M]. London: Constable, 1907.

[5] WU J Z. Vortex definition and “vortex criteria”[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2018, 61(2): 024731.

[6] FUENTES O U V. On the topology of vortex lines and tubes [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2007, 584: 147-156.

[7] Kelvin (Sir W. Thomson). On vortex motion[J]. Trans R Soc Edinb, 1869, 25: 217-260.

[8] SAFFMAN P G, BAKER G R. Vortex interactions[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1979, 11(1): 95-121.

[9] SAFFMAN P G. Vortex dynamics[M]. Cambridge University Press, 1992.

[10] WU J Z, MA H Y, ZHOU M D. Vorticity and vortex dynamics [M]. Berlin Heidelberg, 2006: 151.

[11] KÜCHEMANN D. Report on the I. U. T. A. M. symposium on concentrated vortex motions in fluids [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1965, 21(1): 1.

[12] MOFFATT H K, KIDA S, OHKITANI K. Stretched vortices—the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics [J]. J Fluid Mech, 1994, 259: 241-264.

[13] EPPS B. Review of vortex identification methods[R]. AIAA 2017-0989.

[14] WU J Z, XIONG A K, YANG Y T. Axial stretching and vortex definition[J]. Physics of Fluids, 2005, 17(3): 038108.

[15] KOLÁR V, ŠÍSTEK J. Stretching response of Rortex and other vortex-identification schemes[J]. AIP Advances, 2019, 9(10): 105025.

[16] GAO Y S, LIU C Q. Rortex and comparison with eigenvalue-based vortex identification criteria[J]. Physics of Fluids, 2018, 30(8): 085107.

[17] KADEN H. Aufwicklung einer unstablen Unstetigkeitsfläche [J]. Ingenieur-Archiv, 1931, 2(2): 140-168.

[18] BETZ A. Wie entsteht ein Wirbel in einer wenig zähen Flüssigkeit? [J]. Naturwissenschaften, 1950, 37(9): 193-196.

[19] KRASNY R. Computation of vortex sheet roll-up in the Trefftz plane[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1987, 184: 123-155.

[20] 今井明子, 小松研吾, 等. 魏俊霞(译). 天气预报的科学[J]. 科学世界, 2019, 10: 49.

[21] CHORIN A J. Vorticity and turbulence[M]. New York, NY: Springer New York, 1994.

[22] WU X S. Nonlinear theories for shear flow instabilities: physical insights and practical implications[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2019, 51(1): 451-485.

[23] MOORE D W, SAFFMAN P G. Axial flow in laminar trailing vortices[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1973, 333: 491-508.

[24] LUNDGREN T S. Strained spiral vortex model for turbulent fine structure[J]. Physics of Fluids, 1982, 25(12): 2193.

[25] YAO J, HUSSAIN F. A physical model of turbulence cascade via vortex reconnection sequence and avalanche[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2020, 883: A51.

[26] YANG Y, PULLIN D I. On Lagrangian and vortex-surface fields for flows with Taylor-Green and Kida-Pelz initial conditions[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2010, 661: 446-481.

[27] ZHAO Y M, YANG Y, CHEN S Y. Vortex reconnection in the late transition in channel flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2016, 802: R4.

[28] ZHAO Y M, XIONG S Y, YANG Y, et al. Sinuous distortion of vortex surfaces in the lateral growth of turbulent spots[J]. Physical Review Fluids, 2018, 3(7): 074701.