



高阶精度非线性加权格式权函数研究综述

毛枚良 白进维 闵耀兵 马燕凯 江定武

Review on weighting functions of high-order nonlinear weighted methods

MAO Meiliang, BAI Jinwei, MIN Yaobing, MA Yankai, JIANG Dingwu

引用本文:

毛枚良, 白进维, 闵耀兵, 等. 高阶精度非线性加权格式权函数研究综述[J]. 空气动力学学报, 2024, 42(6): 1-14. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2023.0187

MAO Meiliang, BAI Jinwei, MIN Yaobing, et al. Review on weighting functions of high-order nonlinear weighted methods[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2024, 42(6): 1-14. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2023.0187

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2023.0187>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

全局方向模板在高阶精度非结构有限体积方法中的推广

Extension of the global-direction stencil on high-order unstructured finite volume methods

空气动力学学报. 2021, 39(4): 39-50 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2020.0080>

有关有限差分高精度格式两个应用问题的讨论

Discussions on two problems in applications of high-order finite difference schemes

空气动力学学报. 2020, 38(2): 244-253 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2019.0073>

高阶精度有限差分方法几何守恒律研究进展

A survey of geometry conservation law for high-order finite difference method

空气动力学学报. 2021, 39(1): 157-167 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2020.0111>

非结构网格体心梯度求解方法的精度分析

The accuracy assessment of gradient computation methods on unstructured grids

空气动力学学报. 2019, 37(5): 844-854 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2018.0092>

基于5阶精度格式WCNS-E-5的p-multigrid方法研究

空气动力学学报. 2012, 30(1): 1-6 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2012.01.001>

高阶加权非线性格式的拟线性频谱分析方法研究

Study of quasi-linear spectral analysis method of high-order weighted nonlinear schemes

空气动力学学报. 2015, 33(1): 1-9 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2014.0115>

可压缩湍流边界层壁面函数方法综述

Overview of wall functions for compressible turbulent boundary layers

空气动力学学报. 2021, 39(2): 1-11 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2020.0028>

地址: 四川省绵阳市二环路南段8号11信箱9分箱

电话: 0816-2463375

Email: kqdlxxb@163.com



关注微信公众号
获得更多资讯信息

文章编号: 0258-1825(2024)06-0001-14

高阶精度非线性加权格式权函数研究综述

毛枚良¹, 白进维¹, 闵耀兵^{1,2,*}, 马燕凯^{1,2}, 江定武¹

(1. 中国空气动力研究与发展中心, 绵阳 621000;

2. 空天飞行空气动力学科学与技术全国重点实验室, 绵阳 621000)

摘要: 在简述用于捕捉间断的非线性格式发展历程的基础上, 依托五阶精度 WENO 格式, 介绍了非线性加权格式在候选模板集选取、光滑度指标计算方法及其与非线性权的函数关系等方面做出的努力。对于非等宽候选模板集的情况, 给出了保证非线性加权格式精度的非线性权的量阶关系, 强调了光滑度指标计算方法对格式精度和效率的重要性, 提出了进一步开展多宽度模板集非线性加权格式研究的建议。

关键词: 高阶精度非线性格式; 非线性加权方法; 极值点降阶问题; 非等宽候选模板集; 计算流体力学

中图分类号: V211.3 文献标识码: A doi: 10.7638/kqdlxxb-2023.0187

Review on weighting functions of high-order nonlinear weighted methods

MAO Meiliang¹, BAI Jinwei¹, MIN Yaobing^{1,2,*}, MA Yankai^{1,2}, JIANG Dingwu¹

(1. China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China;

2. State Key Laboratory of Aerodynamics, Mianyang 621000, China)

Abstract: After a brief introduction to the historical development of nonlinear schemes for capturing discontinuities, this paper delves into the research on selecting candidate stencils, calculating smoothness indicators and their relationships with nonlinear weighting functions. This review is centered on the fifth order WENO scheme, serving as a representative example of nonlinear weighted schemes. It highlights the crucial requirements for the leading term order of nonlinear weights to preserve the accuracy of these schemes, especially when dealing with candidate stencils of varying widths. This paper underscores the significance of smoothness indicator calculations in ensuring both the accuracy and efficiency of the scheme. Finally, it offers insights and suggestions for future research aimed at further enhancing nonlinear weighted schemes that utilize candidate stencils with non-uniform widths.

Keywords: high-order nonlinear scheme; nonlinear weighted method; order degradation problem at critical points; non-uniform width candidate stencil; CFD

0 引言

双曲守恒律方程的弱解是包含间断的, 基于线性格式的数值求解在间断附近会出现虚假的数值波动, 这种虚假的数值波动甚至会导致计算发散。为此, 20 世纪 70 年代初, 有 3 位科学家独立提出了构造无

波动高分辨率对流项离散格式的 3 条途径^[1]: 1) 1971 年, 等离子体物理学家 Boris 主要基于通量限制器, 提出了二阶精度无振荡对流项离散格式 SHASTA (sharp and smooth transport algorithm, SHASTA)^[2], 并后续在 *Journal of Computational Physics* (JCP) 期刊上发表了多篇关于非线性限制器观点和格式的文章^[2-5], 该格

收稿日期: 2023-10-11; 修订日期: 2023-11-30; 录用日期: 2023-12-14; 网络出版时间: 2024-01-24

基金项目: 国家自然科学基金(11972362, 11672321, 11372342)

作者简介: 毛枚良(1965—), 男, 湖南涟源人, 博士, 研究方向: 计算流体力学. E-mail: mml219@163.com

通信作者: 闵耀兵*, 博士, 研究方向: 高阶精度数值算法及其应用. E-mail: minyb@126.com

引用格式: 毛枚良, 白进维, 闵耀兵, 等. 高阶精度非线性加权格式权函数研究综述[J]. 空气动力学学报, 2024, 42(6): 1-14.

MAO M L, BAI J W, MIN Y B, et al. Review on weighting functions of high-order nonlinear weighted methods[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2024, 42(6): 1-14(in Chinese). doi: 10.7638/kqdlxxb-2023.0187

式后来被命名为 FCT (flux-corrected transport, FCT); 2) 1972 年, 天文物理学家 vanLeer 提出了改进型无振荡 Lax-Wendroff 格式, 也在 *JCP* 上发表了一系列文章来分享他在高分辨率格式方面的成果^[6-9], 格式命名为 MUSCL(monotonic upstream scheme for conservation laws, MUSCL); 3) 1972 年, 航空工程师 Kolgan 发表了二阶精度无振荡 Godunov 型欧拉格式(non-oscillatory Godunov-type Euler scheme)^[10]。他们是无振荡高分辨率格式的开创者, 同时也拉开了非线性格式研究的序幕, 其核心要点是将不考虑变量分布特征的固定模板离散方式替换为基于变量分布特征调节的可选模板离散方式。

在上述 3 位先驱工作的基础上, Harten 于 1983 年提出了总变差递减(total variation diminishing, TVD)格式^[11], 但 TVD 格式在间断附近会下降到一阶精度, 在极值点处也会下降到一阶精度。1987 年, Harten 又提出了本质无振荡格式(essentially non-oscillatory, ENO)^[12]。 r 阶 ENO 格式采用了 r 个候选模板, 在每个候选模板上以其光滑度指标来判断解在该候选模板上的光滑性, 实际计算则采用最光滑的模板以减小间断对其邻近单元的影响。后来 Shu 和 Osher^[13-14] 又进一步发展了 ENO 格式。与 TVD 格式不同, ENO 格式在极值点处不会损失精度, 因为它是在精度相同的候选模板中挑选出最光滑的。虽然 ENO 格式在极值点处改善了格式精度, 但一个主要不足是, 在光滑区浪费了其他候选模板的信息, 如果合理利用所有模板信息, 可得到精度更高的格式。因此, 1994 年 Liu 等^[15] 首次在有限体积离散框架下提出了 WENO(weighted essentially non-oscillatory, WENO)格式, 简记为 WENO-LOC, 1996 年 Jiang 和 Shu^[16] 在有限差分离散框架下得到更为高效的 WENO 格式, 简记为 WENO-JS。与 ENO 格式不同, WENO 格式所有候选模板进行凸组合, 并使用非线性自适应权作为组合系数, 每个候选模板的非线性权自适应地从 0 到 1 之间变化, 其中非线性权为 0 表示该模板中包含间断, 非线性权为 1 表示除该模板外的其余模板均包含间断, 理想的线性权则表示所有候选模板中均无间断。候选模板非线性权的自适应特征由模板光滑度指标所决定。对所有候选模板进行凸组合, 使得 WENO-LOC 格式比相同计算模板的 ENO 格式精度要高一阶, 而 WENO-JS 格式比 ENO 格式精度要高二阶。根据 WENO-JS 格式设计方法, 对于 r 个 r 阶精度的候选模板的凸组合最高可达到 $2r-1$ 阶精度, 整体计算模板宽度为 $2r-1$ 个计算单元, 在此框架下已经构造了精度高达 11 阶的 WENO

格式^[17-18]。

同一时期, 以张涵信、傅德薰和邓小刚为代表的国内学者在无振荡高分辨率非线性格式构造方面, 也取得了十分丰富的研究成果^[19-31]。从 20 世纪 90 年代后期开始, 为了解决高精度线性格式难以捕捉激波的困难, 邓小刚对高阶精度有限差分格式开展研究, 根据自适应插值的概念构造了一类紧致非线性格式(compact nonlinear scheme, CNS)^[27], 相关计算结果表明 CNS 格式具有良好的激波捕捉能力。CNS 格式的自适应插值涉及 3 个候选模板, 但最终只采用其中最光滑的 1 个, 在光滑流场计算中无疑造成模板信息浪费, 而且 3 个三对角矩阵的求逆运算也使得 CNS 格式计算效率不高。为了弥补 CNS 格式的不足, 1997 年邓小刚等^[28] 提出了五阶精度的加权紧致非线性格式(weighted compact nonlinear scheme, WCNS), 以加权组合代替 CNS 格式设计中的逻辑判断, 在相同计算模板下达到更高的模拟精度^[28,30]。基于混合使用通量点和求解点上通量信息的概念, 2011 年邓小刚等又构造出计算模板更窄、求解效率更高的 HWCNS(hybrid cell-edge and cell-node WCNS, HWCNS)格式^[31], 且数值稳定性更好。需要特别强调的是, 与 WENO 格式相比, WCNS 格式还有一个重要优势是可以满足几何守恒律, 从而使得 WCNS 格式能够适用于复杂几何构型的高阶精度流动模拟^[32-39]。与 WENO 格式相比, WCNS 格式具有 3 方面的优势^[30]: 1) 较高的分辨率; 2) 可以采用各类通量差分和分裂方法; 3) 在曲线网格上具有自由流守恒和涡保持特性。WCNS 格式在复杂外形流动模拟中所表现出的计算鲁棒性明显优于 WENO 格式, 在国际计算流体力学界具有重要影响力^[40-45]。

非线性权的具体形式对非线性加权格式的分辨率具有重要影响。在光滑区, 非线性权是理想权的一种近似, 当其偏离理想权时格式精度降低、耗散增大、分辨率降低, 这种数值误差称为非线性误差。Jiang 和 Shu 设计的非线性权^[16] 引入了较大的非线性误差, 通过改进权函数的设计可以尽量减小非线性误差。为了降低非线性权相对于理想权的偏离程度, Henrick 等提出了一个映射函数^[46], 映射之后的权函数称为 M(Mapped) 权函数, 映射函数使得各个非线性权光滑地向理想线性权靠近; Borges 等^[47] 将把几个候选模板的光滑测试因子进行简单组合, 构造出了更高阶的光滑测试因子, 并由此得到另一种形式的改进非线性权函数(Z 型权函数)。Shen 等^[48] 和 Ha 等^[49] 通过在光滑度指标的一阶差分导数中引入参数来调

整其在光滑度指标中的相对占比,并分别针对不同的流场特征定义了新的光滑度指标,配合 Z 型权函数取得较好的改进效果。Zhu 等^[50-51]提出了一种基于不同宽度计算模板上的不同幂次多项式的非线性加权方式,不同于之前的基于若干个候选模板上低次多项式组合得到高次多项式的加权方式。需要特别指出的是:实际计算中,尽管流动是光滑的,由于网格或流场的不均匀性,各光滑度指标总会存在差异,这种差异也使得非线性权偏离其理想线性权,从而无法彻底消除非线性误差,因此 Taylor 等^[52]建议当光滑度指标之间的比值不超过一定阈值时直接采用线性权,随后 Zhou 等^[53]对该方法进行了适当改进,采用某种差分算子来决定合适的切换时机,除了有效节省计算量外,还能较好甄别极值点和间断点。

类似地,对于包含间断的候选模板,其非线性权值也不可能为零,为了完全消除包含间断的候选模板对计算的影响,Fu 等^[54-57]提出了 TENO(Targeted ENO)格式, TENO 格式可以视为 WENO 格式加权模式的完善,它将由 WENO 格式确定的权值极小的候选模板的权值直接赋为 0,然后再进行一次归一化处理,得到满足相容性条件的非线性权,以期基于相同格式模板上实现光滑区上计算精度最优和分辨率最高的目标。TENO 格式也可以理解为是扩充了候选模板集的 ENO 格式,扩充候选模板集的目的是为了克服 ENO 格式在光滑区浪费模板信息的不足,同时也克服了 WENO-JS 格式在极值点处的降阶问题,但可能会增加计算量,降低格式计算效率。

WCNS 格式的非线性权研究同样取得了丰硕的成果^[40-45,58-64]。与 WENO 格式采用非线性加权直接得到数值通量不同,WCNS 格式的非线性加权应用于变量插值过程,WCNS 格式的非线性插值中涉及的理想线性权系数与 WENO 格式不同,但两者基于相同的间断捕捉机制,构造非线性权函数的方法是可以相互借鉴的。基于上述认知,本文的目标是,基于具有代表性的五阶精度 WENO 格式,梳理相关的非线性加权方法,特别讨论了多宽度候选模板上计算单元数与其非线性权、光滑度指标量阶之间的关系,为后续非线性加权格式的研究奠定基础。

1 JS 权分析研究

尽管 WENO 格式最早由 Liu 等^[15]提出,而受到同行普遍关注并持续改进研究的是 Jiang 和 Shu 提出的有限差分 WENO 格式^[16],并将由 Jiang 和 Shu 提出的 WENO 格式的非线性权函数以其作者姓名首字母命名为 JS 权。

对于双曲守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其半离散形式可以表述为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{h}(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}) \quad (2)$$

其中 h 为网格尺度,一般取 $h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ 。为了构造稳定的数值格式,将通量函数分裂为两部分,即 $f(u) = f^+(u) + f^-(u)$,其中 $df^+(u)/du \geq 0$, $df^-(u)/du \leq 0$,对应地数值通量可以表述为:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \hat{f}_{i+1/2}^+ + \hat{f}_{i+1/2}^- \quad (3)$$

显然,只需要详细研究 $\hat{f}_{i+1/2}^+$ 的情况即可, $\hat{f}_{i+1/2}^-$ 可类似得到。在下文的讨论中略去 $\hat{f}_{i+1/2}^+$ 的上标“+”,简记为 $\hat{f}_{i+1/2}$ 。

在光滑区域,基于 $(x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ 的 6 点模板,可以得到最高精度为五阶的差分离散格式,此时数值通量的计算格式为:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \frac{1}{60}(2f_{i-2} - 13f_{i-1} + 47f_i + 27f_{i+1} - 3f_{i+2}) \quad (4)$$

对于包含间断的情况,为了避免跨间断的数值振荡,通量重构时不能跨越间断,将式(4)中涉及的 5 点计算模板 $S_T = (x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$,拆分为 $S_0 = (x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$ 、 $S_1 = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ 和 $S_2 = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ 三个 3 点候选模板,如图 1 所示。

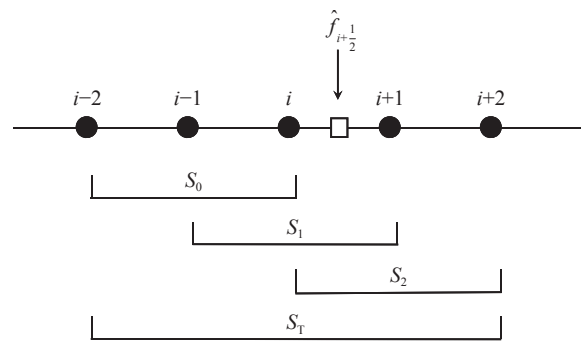


图 1 JS 权重重构候选模板示意图

Fig. 1 Schematic diagram of candidate stencils with JS weighted reconstruction

并在每个候选模板上构造数值通量的三阶精度近似值:

$$\begin{cases} \hat{f}_{i+1/2}^0 = \frac{2f_{i-2} - 7f_{i-1} + 11f_i}{6} \\ \hat{f}_{i+1/2}^1 = \frac{-f_{i-1} + 5f_i + 2f_{i+1}}{6} \\ \hat{f}_{i+1/2}^2 = \frac{-f_{i+2} + 5f_{i+1} + 2f_i}{6} \end{cases} \quad (5)$$

由式(5)的 3 个子模板上的数值通量将 $\hat{f}_{i+1/2}$ 以

加权的形式表达为:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 \omega_k \hat{f}_{i+1/2}^k \quad (6)$$

当 $\omega_0 = 1/10$ 、 $\omega_1 = 6/10$ 、 $\omega_2 = 3/10$ 时, 通量计算格式(6)与式(4)相同, 即使格式达到五阶精度, 此时的权值称为理想权, 记为:

$$C_0 = \frac{1}{10}, \quad C_1 = \frac{6}{10}, \quad C_2 = \frac{3}{10}, \quad \hat{f}_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 C_k \hat{f}_{i+1/2}^k$$

为了侦测间断, 在候选模板上定义光滑度指标 β_k :

$$\beta_k = \sum_{j=1}^2 h^{2j-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{d^j \hat{f}^k}{dx^j} \right)^2 dx \quad (7)$$

其具体形式为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{1}{4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2 + \\ \quad \frac{13}{12}(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 \\ \beta_1 = \frac{1}{4}(f_{i-1} - f_{i+1})^2 + \\ \quad \frac{13}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 \\ \beta_2 = \frac{1}{4}(-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i)^2 + \\ \quad \frac{13}{12}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 \end{array} \right. \quad (8)$$

基于候选模板的光滑度指标, 定义非线性权函数:

$$\omega_k^{JS} = \frac{\alpha_k}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l}, \quad \alpha_k = \frac{C_k}{(\varepsilon + \beta_k)^p} \quad (9)$$

其中: ε 为避免 $\beta_k = 0$ 时分母为零的正小数, 指数 p 的引入则是在非光滑区域让 α_k 能够快速逼近于 0。

对于包含间断的情况, 如果第 k 个候选模板包含间断, 而其余模板内都是光滑的, 则 β_k 会远远大于其余模板的光滑度指标, 从而其非线性权 ω_k^{JS} 逼近于 0, 以避免跨间断通量重构。

对于光滑的情况, 光滑度指标在 x_i 处的 Taylor 级数展开为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = f_i'^2 h^2 + \left(\frac{13}{12} f_i''^2 - \frac{2}{3} f_i' f_i''' \right) h^4 - \\ \quad \left(\frac{13}{6} f_i'' f_i''' - \frac{1}{2} f_i' f_i^{(4)} \right) h^5 + O(h^6) \\ \beta_1 = f_i'^2 h^2 + \left(\frac{13}{12} f_i''^2 + \frac{1}{3} f_i' f_i''' \right) h^4 + O(h^6) \\ \beta_2 = f_i'^2 h^2 + \left(\frac{13}{12} f_i''^2 - \frac{2}{3} f_i' f_i''' \right) h^4 + \\ \quad \left(\frac{13}{6} f_i' f_i''' - \frac{1}{2} f_i' f_i^{(4)} \right) h^5 + O(h^6) \end{array} \right. \quad (10)$$

如果 $f' \neq 0$, 则由式(10)得到:

$$\beta_k = f_i'^2 h^2 [1 + O(h^2)], \quad k = 0, 1, 2 \quad (11)$$

于是有^[39]:

$$\omega_k^{JS} = C_k + O(h^2) \quad (12)$$

在此条件下, 可以进一步证明:

$$\frac{1}{h} (\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}) = \frac{\partial f}{\partial x} + O(h^5) \quad (13)$$

意即上述 WENO-JS 格式具有五阶精度^[16]。

如果 $f' = 0$ (极值点处), 类似地, 由光滑度指标的 Taylor 级数展开式(10)可以得到:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{13}{12} f_i''^2 h^4 [1 + O(h)] \\ \beta_1 = \frac{13}{12} f_i''^2 h^4 [1 + O(h^2)] \\ \beta_2 = \frac{13}{12} f_i''^2 h^4 [1 + O(h)] \end{array} \right. \quad (14)$$

以及:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0^{JS} = C_0 + O(h) \\ \omega_1^{JS} = C_1 + O(h^2) \\ \omega_2^{JS} = C_2 + O(h) \end{array} \right. \quad (15)$$

在极值点处, ω_0^{JS} 和 ω_2^{JS} 与其理想线性权值的截断误差为 $O(h)$, 而不再是 $O(h^2)$, 由此导致 WENO-JS 格式的空间离散精度降低, 具体表现为: 对于一阶极值点 ($f' = 0, f'' \neq 0$), WENO-JS 格式精度降低为三阶; 对于二阶极值点 ($f' = f'' = 0, f''' \neq 0$), WENO-JS 格式精度降低为二阶^[46]。

上面讨论了变量分布特征对权函数的影响, 其实 JS 权中参数 ε 和 p 对权函数的取值也存在不可忽略的影响, 为了更加直观地展示 JS 权中参数 ε 和 p 对权值的影响, 定义:

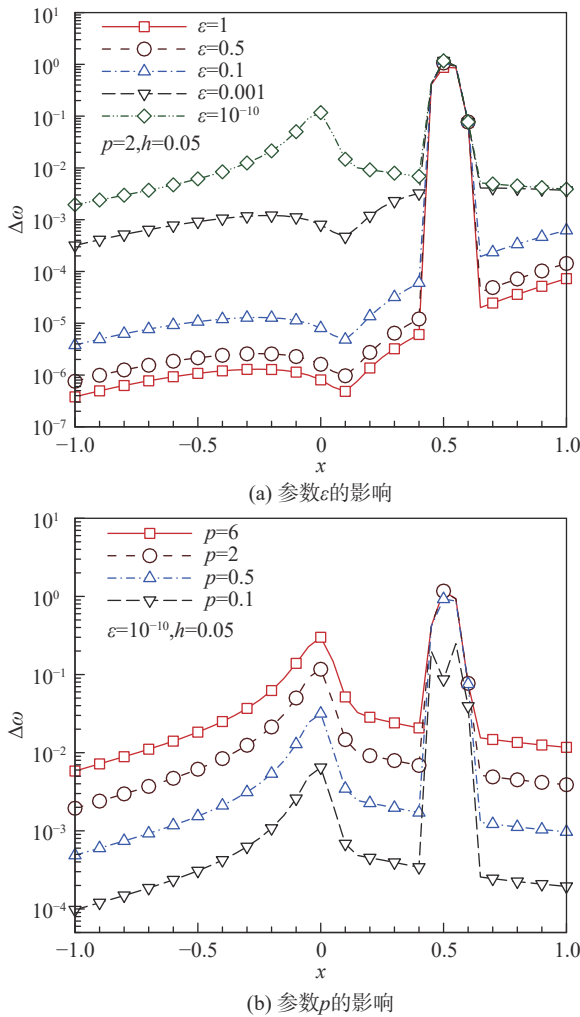
$$\Delta\omega = \sum_{k=0}^2 |\omega_k^{JS} - C_k|$$

由测试函数:

$$u(x) = \begin{cases} e^{0.75(x-1)} x^2, & x \in [-1, 0.525] \\ 2 + e^{0.75(x-1)} x^2, & x \in [0.525, 1] \end{cases}$$

得到非线性权偏离理想权的情况如图 2 所示。

由图 2(a) 可见, 随着 ε 增大, $\Delta\omega$ 向零逼近, 这是因为 ε 增大会减小光滑度指标差异对权函数取值的影响, 从而减小权函数与其理想权值的差异。因此理想

图 2 参数 ε 和 p 对非线性权值的影响Fig. 2 Influence of parameter ε and p on nonlinear weights

的取值方式是: 在光滑区, ε 取值为大的正数, 以至于光滑度指标 β_k 的影响可以忽略, ω_k^{JS} 的取值与理想权之间的差异也可以忽略; 而在间断附近, ε 应取为接近机器零的小正数, 从而使得包含间断的候选模板对应的权值为 0, 避免跨间断的变量重构。

由图 2(b) 可见, 随着 p 减小, $\Delta\omega$ 向零逼近, 这是因为 p 增大会放大光滑度指标差异对权函数取值的影响。与 ε 取值类似, 指数 p 理想的取值方式是: 在间断附近, p 取为大的正数, 从而使得包含间断的候选模板对应的权值为 0, 避免变量重构跨过间断; 在光滑区, p 取值为尽可能小的正数, 以至于光滑度指标 β_k 之间的差异对权值的影响可以忽略, 则 ω_k^{JS} 与理想权值之间的差异也可以忽略, 最极端的情况是 $p=0$, 则有 $\omega_k^{JS} = C_k$, WENO-JS 格式退化为理想的高阶线性格式。

综上所述, 减小 WENO-JS 格式的非线性误差的关键在于其非线性权函数的构造形式及其具体参数的选取方式。

2 非线性权的典型改进形式

由上述分析可知, JS 权导致格式精度在极值点处降阶, 为了解决非线性加权格式的极值点降阶问题, 近年来涌现出大量的相关研究工作^[46-53], 下面简要介绍其中 4 类有代表性的工作。

2.1 映射权 (Mapped Weight)

Henrick 等^[46] 提出了一个映射函数, 具体如下:

$$g_k(\omega) = \omega \frac{C_k + C_k^2 - 3C_k\omega + \omega^2}{C_k^2 + \omega - 2C_k\omega}, C_k \in (0, 1) \quad (16)$$

该映射函数是一个单调递增函数, 如图 3 所示, 且具有如下性质:

- (1) $g_k(0) = 0, g_k(1) = 1, g_k(C_k) = C_k, 0 \leq g_k(\omega) \leq 1$;
- (2) $\lim_{\omega \rightarrow 0} g_k(\omega) = 0, \lim_{\omega \rightarrow 1} g_k(\omega) = 1$;
- (3) $g'_k(C_k) = g''_k(C_k) = 0$ 。

其中 $k = 0, 1, 2$ 。

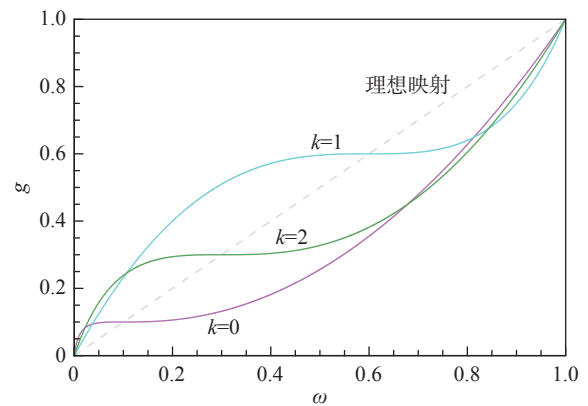


图 3 映射函数分布图

Fig. 3 Distributions of mapping functions

映射函数 $g_k(\omega)$ 在第 k 个理想权值附近变得平坦, 对于 WENO-JS 格式在极值点处的降阶问题(式(15)), 将 ω_k^{JS} 作为初始值, 通过式(16)的映射变换, 可以在光滑区得到更加逼近理想权值的权函数:

$$\alpha_k^* = g_k(\omega_k^{JS}) \quad (17)$$

基于 Taylor 级数方法分析映射权在极值点处的精度:

$$\begin{aligned} \alpha_k^* &= g_k(C_k) + g'_k(C_k)(\omega_k^{JS} - C_k) + \frac{1}{2}g''_k(C_k)(\omega_k^{JS} - C_k)^2 + \\ &\quad \frac{1}{6}g'''_k(C_k)(\omega_k^{JS} - C_k)^3 + \dots \\ &= C_k + \frac{1}{C_k(1-C_k^2)}(\omega_k^{JS} - C_k)^3 + \dots \\ &= C_k + O(h^3) \end{aligned} \quad (18)$$

基于 α_k^* 得到改进的非线性权:

$$\omega_k^M = \frac{\alpha_k^*}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^*} \quad (19)$$

类似地,可以进一步得到:

$$\omega_k^M = C_k + O(h^3) \quad (20)$$

从而保证了采用映射权的 WENO-M 格式在一阶极值点处不会降阶,但在二阶极值点处 WENO-M 格式依然会降为二阶精度^[46]。

2.2 Z型权

Borges 等^[47]使用整个 5 点模板 S_T (见图 1)设计一个高阶的光滑度指标,利用式(8)定义的光滑度指标可以表示为:

$$\tau_5 = |\beta_2 - \beta_0| \quad (21)$$

由式(10)得到:

$$\tau_5 = \begin{cases} \frac{13}{3} |f_i'' f_i'''| h^5 + O(h^6), & f_i' = 0 \\ \frac{103}{36} |f_i''' f_i^{(4)}| h^7 + O(h^8), & f_i' = f_i'' = 0 \end{cases} \quad (22)$$

τ_5 是 f 高阶导数的度量,具有以下性质:

(1)如果模板 S_T 不包含间断, $\tau_5 \ll \beta_k$, $k = 0, 1, 2$;

(2)如果解在某些子模板 S_k 上是连续的,但在总模板 S_T 上包含间断,对于不包含间断的子模板 S_k ,则 $\beta_k \ll \tau_5$;

(3) $\tau_5 \leq \max \beta_k$ 。

重新定义光滑度量因子 β_k^z :

$$\beta_k^z = \frac{\beta_k + \varepsilon}{\beta_k + \varepsilon + \tau_5}, k = 0, 1, 2 \quad (23)$$

和非线性权 ω_k^z :

$$\omega_k^z = \frac{\alpha_k^z}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^z}, \alpha_k^z = \frac{C_k}{\beta_k^z} = C_k \left(1 + \frac{\tau_5}{\beta_k + \varepsilon} \right) \quad (24)$$

但是上述 WENO-Z 格式依然存在极值点降阶的问题,如在一阶极值点处,上述 WENO-Z 格式将降为四阶精度^[47]。为了有效克服 WENO-Z 格式的极值点降阶问题,一种简单的处理方式:

$$\alpha_k^z = C_k \left[1 + \left(\frac{\tau_5}{\beta_k + \varepsilon} \right)^q \right] \quad (25)$$

其中 $q \geq 2$ 。容易证明基于上式构造的 WENO-Z 格式在一阶极值点处($f' = 0, f'' \neq 0$)依然能够保持设计的五阶精度。

2.3 NS权

Ha 等^[65]基于 JS 权的构造基本框架,提出了一种的光滑度指标:

$$\beta_k = \xi |(1-k) f_{i-2+k} + (2k-3) f_{i-1+k} + (2-k) f_{i+k}| + |f_{i-2+k} - 2f_{i-1+k} + f_{i+k}| \quad (26)$$

其中 $\xi \in (0, 1]$, $k = 0, 1, 2$ 为候选模板序号。

式(26)右侧第一项对应 $x_{i+1/2}$ 处的一阶导数差分,第二项为二阶导数差分,与 JS 权的光滑度指标差异在于:1)使用了绝对值,而 JS 权采用平方;2)在一阶导数差分项前引入了一个调节参数 ξ ,具体取值与算例相关,一般情况下取 $\xi = 0.4$ 。为了让非线性权 β_k 在光滑区快速逼近理想权 C_k ,仿照 Z 型权,再定义一个高阶光滑度指标:

$$\zeta = \frac{1}{2} [(\beta_0 - \beta_2)^2 + g^2 (|f_{i+1} - f_i|)], g(x) = \frac{x^3}{1+x^3} \quad (27)$$

其中 ζ 是 $|\beta_0 - \beta_2|$ 和 $g(|f_{i+1} - f_i|)$ 的一种平均,且 $|\beta_0 - \beta_2|$ 使用了 5 点模板,类似 Z 型权的 τ_5 ,据此得到非线性权如下:

$$\begin{cases} \omega_k^{NS} = \frac{\alpha_k^{NS}}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^{NS}} \\ \alpha_k^{NS} = \frac{C_k}{\beta_k^{NS}} = C_k \left(1 + \frac{\zeta}{(\varepsilon + \beta_k)^2} \right) \\ \beta_k^{NS} = \frac{(\varepsilon + \beta_k)^2}{(\varepsilon + \beta_k)^2 + \zeta} \end{cases} \quad (28)$$

通过与 Z 型权类似的量级分析,在一阶极值点($f' = 0, f'' \neq 0$)处有:

$$\frac{\zeta}{(\varepsilon + \beta_k)^2} = O(h^2) \quad (29)$$

因此,采用 NS 权的 WENO-NS 格式在一阶极值点处仍然能够保持五阶精度。

2.4 ZQ权

Zhu 等^[50]提出了一种基于 1 个 5 点模板和 2 个 2 点 TVD 型模板的混合加权方案,具体实现过程如下:

第一步:在 3 个模板上构造通量多项式。5 点模板 $S_1 = \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$ 上的 $p_1(x)$ 为四次多项式,2 点模板 $S_2 = \{i-1, i\}$ 和 $S_3 = \{i, i+1\}$ 上的 $p_2(x)$ 和 $p_3(x)$ 为线性多项式,由

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p_n(x) dx = f_i, j \in S_k \quad (30)$$

确定 $p_1(x)$ 、 $p_2(x)$ 和 $p_3(x)$ 的具体计算形式。

第二步: 选定线性权。与前文介绍的非线性权不同, ZQ 权的 3 个候选模板的宽度不同, 实质上是放弃了最优凸组合的策略, 因此, 线性权可以选择任意一组和为 1 的正数。在此原则下, 根据典型的数值实验, 考察所取权值对计算结果分辨率和激波等间断区域无实质性振荡控制能力, 确定为 $C_1 = 0.98, C_2 = C_3 = 0.01$, 其中 C_i 是模板 S_i 上的通量多项式的线性权。

第三步: 光滑度指标计算。遵从 JS 权的光滑度指标计算方法:

$$\beta_n = \sum_{j=1}^r h^{2j-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{d^j p_n}{dx^j} \right)^2 dx, \quad n = 1, 2, 3 \quad (31)$$

其具体计算方式参考文献 [50], 并据此定义高阶光滑度指标:

$$\tau = \left(\frac{|\beta_1 - \beta_2| + |\beta_1 - \beta_3|}{2} \right)^2 \quad (32)$$

第四步: 非线性权计算:

$$\begin{cases} \omega_k^{ZQ} = \frac{\alpha_k^{ZQ}}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^{ZQ}} \\ \alpha_k^{ZQ} = \gamma_k \left(1 + \frac{\tau}{\beta_k + \varepsilon} \right) \end{cases} \quad (33)$$

在光滑区, 基于 Taylor 展开的精度分析结果表明: $\tau/(\varepsilon + \beta_k) = O(h^4)$ ($k = 1, 2, 3$), 由此可知 $\omega_k^{ZQ} = \gamma_k + O(h^4)$, 需要特别指出的是, 即使是在二阶极值点 ($f' = f'' = 0, f''' \neq 0$) 处, 仍然可以证明 $\omega_k^{ZQ} = \gamma_k + O(h^4)$, 因此, ZQ 权满足五阶精度条件。

第五步: 在半节点 $i + 1/2$ 处的非线性加权数值通量为:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \omega_1^{ZQA} p_1(x_{i+1/2}) + \omega_2^{ZQA} p_2(x_{i+1/2}) + \omega_3^{ZQA} p_3(x_{i+1/2}) \quad (34)$$

其中:

$$\omega_1^{ZQA} = \frac{\omega_1^{ZQ}}{\gamma_1}, \omega_2^{ZQA} = \omega_2^{ZQ} - \omega_1^{ZQ} \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \omega_3^{ZQA} = \omega_3^{ZQ} - \omega_1^{ZQ} \frac{\gamma_3}{\gamma_1}$$

将非线性权 ω_i^{ZQ} 替换为 ω_i^{ZQA} , 是为了剔除光滑区低阶窄模板对通量的贡献, 从而实现高精度和高分辨率。

2.5 应用于五阶精度 WCNS 格式

M 权 [46]、 Z 型权 [47]、 NS 权 [49] 和 ZQ 权 [50] 均能够解决 WENO-JS 格式在一阶极值点附近的精度下降问题, 可以提高 WENO 格式在光滑区的分辨率。因为半节点处非线性加权插值在极值点处精度下降, 同样

会导致 WCNS-JS 格式 [28] 精度降阶。由于 WENO 格式的非线性通量重构权和 WCNS 格式半节点处变量非线性插值权的设计方法是可以相互借鉴的, 甚至可以直接互用, 将 M 权、 Z 型权、 NS 权和 ZQ 权应用于 WCNS 格式的半节点插值, 考察其对格式精度和分辨率的改善情况。

五阶精度 WCNS 格式在半节点处变量的非线性加权插值为:

$$u_{i+1/2}^\omega = \sum_{k=0}^2 \omega_k u_{i+1/2}^k \quad (35)$$

对于 JS 权、 M 权、 Z 型权和 NS 权有:

$$\begin{cases} u_{i+1/2}^0 = u_{i+1/2} + d_3^0 h^3 + O(h^4) \\ u_{i+1/2}^1 = u_{i+1/2} + d_3^1 h^3 + O(h^4) \\ u_{i+1/2}^2 = u_{i+1/2} + d_3^2 h^3 + O(h^4) \end{cases}$$

其理想权值为 $C_0 = 1/16, C_1 = 10/16, C_2 = 5/16$, 则格式保持五阶精度的充分必要条件为:

$$\sum_{k=0}^2 (\omega_k - C_k) d_3^k = O(h^3) \quad (36)$$

对于 ZQ 权有:

$$\begin{cases} u_{i+1/2}^0 = u_{i+1/2} + d_3^0 h^5 + O(h^6) \\ u_{i+1/2}^1 = u_{i+1/2} + d_2^1 h^2 + O(h^3) \\ u_{i+1/2}^2 = u_{i+1/2} + d_2^2 h^2 + O(h^3) \end{cases}$$

其理想权值为 $C_0 = 1, C_1 = C_2 = 0$, 则格式保持五阶精度的充分必要条件为:

$$\sum_{k=1}^2 (\omega_k - C_k) d_2^k = O(h^4) \quad (37)$$

定义:

$$O_\omega = \frac{\ln \Delta \omega_{m-1}(h_1) - \ln \Delta \omega_m(h_2)}{\ln h_1 - \ln h_2} \quad (38)$$

对于 M 权、 Z 型权和 NS 权, $\Delta \omega_m = \left| \sum_{k=0}^2 (\omega_k - C_k) d_3^k \right|$, 若 $O_\omega \geq 3$, 则格式能保持五阶精度; 对于 ZQ 权, $\Delta \omega_m = \sum_{k=1}^2 \left| \omega_k^{ZQA} d_2^k \right|$, 若 $O_\omega \geq 4$, 则格式能保持五阶精度。

函数 $u(x) = e^{0.75(x-1)} x^N$ 在 $x = 0$ 处, $N = 2$ 时为一阶极值点, $N = 3$ 时为二阶极值点, 取 $h_0 = 0.1, h_m = h_0/2^m, m = 1, 2, 3, 4, 5$, 以测试上述 4 类加权函数在极值点处

插值精度的情况, Z 型权中取 $q=2$ 。表 1 和表 2 给出了测试结果, 在一阶极值点处, 四类加权函数均可以

保证格式达到五阶精度, 而对于二阶极值点, 只有 ZQ 权能够达到设计精度。

表 1 一阶极值点的精度测试
Table 1 Accuracy test of first-order critical points

$u(x) = e^{0.75(x-1)}x^2, \varepsilon = 1 \times 10^{-40}$				
h	Z型权		M权	
	$\Delta\omega_m$	O_ω	$\Delta\omega_m$	O_ω
$h_0 = 0.1$	1.3525×10^{-6}	—	1.4098×10^{-6}	—
$h_1 = h_0/2^1$	8.4953×10^{-8}	3.99	1.8938×10^{-7}	2.90
$h_2 = h_0/2^2$	5.3162×10^{-9}	4.00	2.4482×10^{-8}	2.95
$h_3 = h_0/2^3$	3.3237×10^{-10}	4.00	3.1103×10^{-9}	2.98
$h_4 = h_0/2^4$	2.0775×10^{-11}	4.00	3.9191×10^{-10}	2.99
$h_5 = h_0/2^5$	1.2984×10^{-12}	4.00	4.9183×10^{-11}	2.99
h	NS权		ZQ权	
	$\Delta\omega_m$	O_ω	$\Delta\omega_m$	O_ω
$h_0 = 0.1$	3.4309×10^{-7}	—	2.1338×10^{-10}	—
$h_1 = h_0/2^1$	3.9985×10^{-8}	3.10	1.3318×10^{-11}	4.00
$h_2 = h_0/2^2$	4.8166×10^{-9}	3.05	8.3212×10^{-13}	4.00
$h_3 = h_0/2^3$	5.9072×10^{-10}	3.03	5.2005×10^{-14}	4.00
$h_4 = h_0/2^4$	7.3130×10^{-11}	3.01	3.2518×10^{-15}	4.00
$h_5 = h_0/2^5$	9.0968×10^{-12}	3.01	2.0117×10^{-16}	4.01

表 2 二阶极值点的精度测试
Table 2 Accuracy test of second-order critical points

$u(x) = e^{0.75(x-1)}x^3, \varepsilon = 1 \times 10^{-40}$				
h	Z型权		M权	
	$\Delta\omega_m$	O_ω	$\Delta\omega_m$	O_ω
$h_0 = 0.1$	5.2343×10^{-2}	—	6.1926×10^{-2}	—
$h_1 = h_0/2^1$	3.5249×10^{-2}	0.57	6.1936×10^{-2}	0.00
$h_2 = h_0/2^2$	1.5283×10^{-2}	1.21	6.1940×10^{-2}	0.00
$h_3 = h_0/2^3$	4.6801×10^{-3}	1.71	6.1942×10^{-2}	0.00
$h_4 = h_0/2^4$	1.2397×10^{-3}	1.92	6.1943×10^{-2}	0.00
$h_5 = h_0/2^5$	3.1462×10^{-4}	1.98	6.1944×10^{-2}	0.00
h	NS权		ZQ权	
	$\Delta\omega_m$	O_ω	$\Delta\omega_m$	O_ω
$h_0 = 0.1$	4.7547×10^{-2}	—	3.7683×10^{-12}	—
$h_1 = h_0/2^1$	4.9888×10^{-2}	-0.07	5.8761×10^{-14}	6.00
$h_2 = h_0/2^2$	5.0901×10^{-2}	-0.03	9.1768×10^{-16}	6.00
$h_3 = h_0/2^3$	5.1372×10^{-2}	-0.01	1.4337×10^{-17}	6.00
$h_4 = h_0/2^4$	5.1599×10^{-2}	-0.01	2.2401×10^{-19}	6.00
$h_5 = h_0/2^5$	5.1711×10^{-2}	0.00	3.5001×10^{-21}	6.00

图 4 给出了采用这 4 类非线性权和理想权时五阶精度 WCNS 格式的拟线性频谱特性，图中“Linear”表示理想权。在拟线性频谱分析结果中，ZQ 权的耗散是最大的，NS 权的频谱特性最接近理想权，在低波数区间，四类权频谱特性与理想权的差异不明显。

从构成要素来看，JS 权框架由候选模板、光滑度指标及其同非线性权的函数关系 3 个基本要素构成，Henrick 等^[46]仅改进了光滑度指标与非线性权的函数关系，而 Borges^[47]和 Ha 等^[65]则修改了光滑度指标，后者的特别贡献在于引入了参数来调整一阶差分与二阶差分对光滑度指标的贡献度；Zhu 等^[50]则对候选模板进行了调整，放弃了原有的等宽度模板最优凸组合的模式，采用了非等宽候选模板，该工作再次打开了高阶精度非线性加权格式研究的空间，其与 JS 权的关系如图 5 所示。另外，从三要素来归类捕捉激波的非线性有限差分格式，可以将 TVD 格式类限制器函数视为光滑度指标和插值/重构函数融合在一起的一类非线性加权函数，其光滑度指标可视为

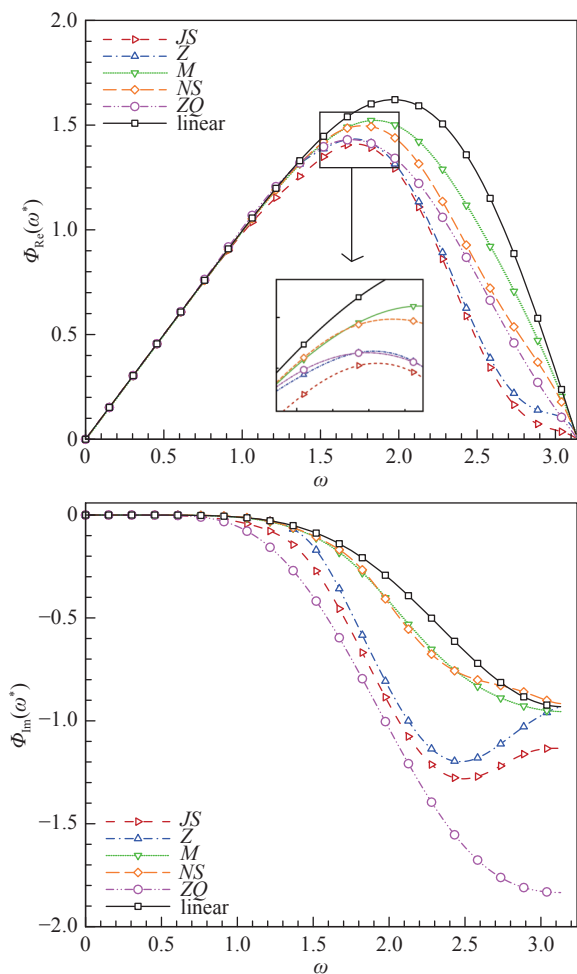


图 4 拟线性频谱分析的修正波数频谱特性

Fig. 4 Spectral characteristics of modified wavenumber in quasi-linear spectrum analysis

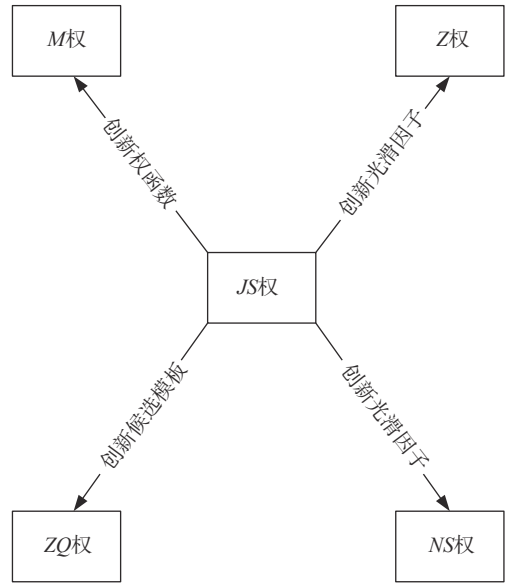


图 5 五阶精度典型非线性权关系示意图

Fig. 5 Schematic diagram of typical nonlinear weight relationship for 5th-order schemes

NS 权两点模板的情形，ENO 和 TENO 格式只是非线性权与光滑度指标的函数关系不同而已。

3 非线性权的量阶分析

对于经典凸组合式非线性加权，其非线性权在光滑区逼近理想权，其量阶是显而易见的，但对于 ZQ 权这种非经典凸组合式非线性加权，是有必要讨论的。先给出两个具体例子的结果，然后给出更加一般性的结论。

3.1 ZQ 权

ZQ 权可以改写为：

$$u_{i+1/2}^{ZQ} = u_{i+1/2}^1 + p_{21}(x_{i+1/2}) + p_{31}(x_{i+1/2}) \quad (39)$$

其中： $u_{i+1/2}^1$ 为 5 点模板上的五阶精度插值， $u_{i+1/2}^2$ 和 $u_{i+1/2}^3$ 为其余两个 2 点模板上的插值，且有：

$$p_{k1}(x_{i+1/2}) = \omega_k^{ZQA} (u_{i+1/2}^k - u_{i+1/2}^1), \quad k = 2, 3$$

$$\omega_1^{ZQA} = C_T \left(1 + \frac{\tau}{\beta_1} \right), \quad \omega_2^{ZQA} = C_T \gamma_2 \left(\frac{\tau}{\beta_2} - \frac{\tau}{\beta_1} \right),$$

$$\omega_3^{ZQA} = C_T \gamma_3 \left(\frac{\tau}{\beta_3} - \frac{\tau}{\beta_1} \right),$$

$$C_T = \left(\sum_{l=0}^2 \alpha_l^{ZQ} \right)^{-1} = \left[1 + \tau \left(\sum_{l=1}^3 \frac{\gamma_l}{\beta_l} \right) \right]^{-1}$$

由式(31)和式(32)给出光滑度指标的表达式，利用 Taylor 展开可以得到：

$$\begin{cases} \omega_1^{ZQA} = O(1) \\ \omega_2^{ZQA} = O(h^4) \\ \omega_3^{ZQA} = O(h^4) \end{cases} \quad (40)$$

容易得到:

$$\frac{\omega_k^{ZQA}}{\omega_1^{ZQA}} = O(h^4), \quad k = 2, 3 \quad (41)$$

由于 $u_{i+1/2}^k - u_{i+1/2}^1 = O(h^2)$, 于是 $p_{1k}(x_{i+1/2}) = O(h^6)$, 确保了 WENO-ZQ 格式具有五阶精度。

3.2 Z型权

Z型权的五阶精度非线性加权插值为:

$$u_{i+1/2}^{(\omega_z)} = \sum_{k=0}^2 \omega_k^Z u_{i+1/2}^k \quad (42)$$

其中:

$$\omega_k^Z = \frac{\alpha_k^Z}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^Z}, \quad \alpha_k^Z = \frac{C_k}{\beta_k^Z} = \frac{C_k}{C_T}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$C_T = \left[1 + \sum_{i=0}^2 C_i \left(\frac{\tau_5}{\beta_i} \right)^q \right]^{-1}$$

在原有的 3 点候选模板基础上加入 5 点模板 $S_3 = \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$, 类似于 ZQ 权, 形成一个具有 4 个候选模板的模板集, 且令 $\beta_3 = \tau_5$, $C_3 = 1$, $\hat{f}_{i+1/2}^3 = \hat{f}_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 C_k \hat{f}_{i+1/2}^k$, 定义非线性权为:

$$\alpha_k = \frac{C_k}{(\beta_k)^q}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (43)$$

则有:

$$\omega_k^\tau = C_T \left(\frac{\tau_5}{\beta_k} \right)^q C_k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (44)$$

于是得到非线性加权重构通量为:

$$u_{i+1/2}^{(\omega_z)} = \sum_{k=0}^3 \omega_k^\tau u_{i+1/2}^k \quad (45)$$

可以证明 $u_{i+1/2}^{(\omega_z)} = u_{i+1/2}^{(\omega_z)}$ 。

由此可见, Z型权可以转换为 4 个宽度不相同的候选模板的非线性加权, 而且宽模板上的高次多项式采用了高阶光滑度指标, 窄模板上的低阶多项式采用了低阶光滑度指标, 相同宽度的模板采用相同阶数的光滑度指标, 保证了光滑度指标阶数与多项式幂次的一致性。由此可见, 宽度不同的候选模板上的加权方式, 同宽度相同候选模板上的加权方式具有一致性, 后者也可以理解为前者的一种特殊情况。

由式(42), 可得

$$\frac{\omega_k^\tau}{\omega_3^\tau} = C_k \left(\frac{\tau_5}{\beta_k} \right)^q = O(h^{k_z}), \quad k = 0, 1, 2 \quad (46)$$

按照 3.1 节的精度分析可知, 在光滑区, 只要 $k_z \geq 3$ 就能确保 WENO-Z 格式具有五阶精度。

3.3 非线性权的量阶分析

在光滑区, 式(43)和式(46)给出了两种非线性权的 5 点模板权与其子模板权的量级关系, 这种关系可以保证格式具有五阶精度。

类似 ZQ 权的不同宽度模板非线性加权的情况, 设模板 S_0 包含 N_0 个节点, 光滑度指标 β_0 , 非线性权为 ω_0 , 模板 S_k (k 为正整数) 包含 N_k 个节点, 光滑度指标 β_k , 且 $S_0 \supset S_k$ ($N_k < N_0$), 可以证明, 格式达到最优精度的充分条件为:

$$\begin{cases} \frac{\omega_k}{\omega_0} = O(h^M) \\ M \geq N_0 - N_k + 1 \end{cases} \quad (47)$$

对于所有子模板 S_k 成立。

式(43)和式(46)就是式(47)的两个具体例子。ZQ 权同光滑度指标的关系比较复杂, 计算量相比其他权也较大; 而 Z型权的非归一化形式同模板的光滑度指标具有十分简洁的关系式。对于非归一化非线性权 α_k 和光滑度指标 β_k 满足 $\alpha_k \beta_k = C_k$ (C_k 为正常数) 时, 同样可以证明, 格式达到最优精度的充分条件为:

$$\begin{cases} \frac{\beta_0}{\beta_k} = O(h^M) \\ M \geq N_0 - N_k + 1 \end{cases} \quad (48)$$

对于所有子模板 S_k 成立。

如果子模板中, 与 Z型权类似, 存在若干个相同宽度的子模板, 则格式达到最优精度的条件有可能放宽。如 Z型权, 此时它的三个 3 点模板的非线性权只要满足 $\sum_{k=0}^2 (\omega_k - C_k) d_3^k = O(h^3)$, 则式(42)中 $k_z = 2$ 也能够保持格式为五阶精度。另外, 需要特别强调的是:

1) 在实际计算中, 为满足格式精度要求, 光滑度指标量阶与模板宽度协调一致是比较容易实现的。在光滑区, 要保证量阶高的光滑度指标在数值上比量阶低的小, 即:

$$\beta_{k_1} \ll \beta_{k_2}, \quad k_1 > k_2 \quad (49)$$

从而使得

$$|u_{i+1/2}^T| \gg \sum_{k=1}^{N-1} \omega_k^N |u_{i+1/2}^k - u_{i+1/2}^T| \quad (50)$$

是需要深入研究的, Borges 等^[47]设计的光滑度指标 τ_5 是一个成功案例。

2) 不同宽度模板上的非线性插值/重构方法尽管都能满足精度要求, 但表达式中非线性项 $\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^N (u_{i+1/2}^k - u_{i+1/2}^{k,\max})$ ($u_{i+1/2}^{k,\max}$ 为含 i 点但不包含间断的最宽模板上的最优精度插值/重构量) 不仅会影响到光滑区的分辨率, 也会影响到间断的分辨率^[50-51,64], 如 Zhu 等^[50]的实验算例结果中的间断附近甚至存在比较明显的非物理波动, 应该可以改进和完善光滑度指标的设计等方面来消除这种非线性波动。

3) 非线性加权格式的计算效率也应该受到重视。由于随着模板增宽, 导数阶数和每阶导数的差分精度同时增加, 使得利用式(31)计算的模板光滑度指标的计算量会迅速增加, 具体见文献^[51]。比较有意思的是, Z 型权、 NS 权和 ZQ 权都给出了各自的高阶光滑度指标 τ , 显然, Z 型权的高阶光滑度指标计算效率是最高的。研究宽模板上光滑度指标计算方法, 是改善高阶精度非线性加权格式计算效率的重要途径。为了更加直观地了解非线性权对计算效率的影响, 以 JS 权作为基准, 表 3 给出了典型加权函数对 Rayleigh–Taylor 不稳定问题的单步计算的 CPU 时间, M 权比 JS 权增加了 30% 多的计算量, 如果仅以加权过程的计算量为基准, 增加的幅度还会更多, 由此可见, 非线性权函数对计算效率具有重要的影响。

表 3 不同加权函数计算 Rayleigh–Taylor 不稳定问题的单个时间步的 CPU 时间对比 (以 JS 权为基准, 网格规模 120×480)

Table 3 CPU time used (in seconds) per time step with different nonlinear weighting functions to simulate Rayleigh–Taylor instability problem (CPU time normalized by JS weights, calculation with grid size 120×480)

JS	Z	M	NS	ZQ
1.00	1.052	1.307	1.134	1.209

因此, 对于不同宽度模板集, 如果光滑度指标设计满足式(49), 且宽模板的高阶光滑度指标能够类似于 Z 型权, 通过窄模板的低阶光滑度指标简单组合得到, 必将显著提高非线性加权高精度格式的计算效率。

4 结 论

加权非线性格式的研究已经持续了将近 30 年, 其中关于非线性加权函数完善方面的研究, 围绕在光

滑区让格式达到最优精度而在间断附近不出现非物理波动为目标, 提出了类型众多的非线性加权方式。本文从非线性加权方法中包含的候选模板集、光滑度指标及其与权的函数关系 3 个基本要素的角度, 介绍了五阶精度非线性加权格式具有代表性的研究工作, 得到以下认识:

1) 大多数修正 JS 权不足的工作都是围绕改善光滑度指标及其权函数, 没有触动其等宽度候选模板集和传统凸组合的加权框架。Zhu 等^[50]放弃了传统的等宽候选模板上凸组合加权的模式, 实现了在不同宽度候选模板集上进行非线性加权, 再次打开了高阶精度非线性加权格式研究的空间。从理论上讲, ZQ 权在保持最优精度的同时, 应该更加有利于间断的捕捉, 但从算例给出的间断捕捉效果来看, 仍有进一步改进的空间。

2) 光滑度指标是当前非线性加权方法的最重要因素, 它不仅影响非线性加权格式的精度和分辨率, 对计算效率也有重要的影响。按式(31)计算模板光滑度指标时, 格式精度越高, 模板越宽, 光滑度指标对计算效率的影响越大。

3) 类似于 3.1 节中的等价 Z 型权, 基于不同宽度候选模板的非线性权的量阶关系, 提出高效的量阶与模板宽度协调一致的光滑度指标计算方法, 在不同宽度的候选模板集上, 建立更加高效的高分辨率的非线性加权格式, 以适应间断处于模板不同位置的各种复杂情况, 应该是 CFD 研究界所期望的。

最后, 从候选模板、光滑度指标及其与权的函数关系三要素来归类捕捉间断的有限差分格式, 可以将 TVD 类格式中限制器函数视为光滑度指标和插值/重构函数融合在一起的一类非线性加权函数, ENO 和 TENO 格式只是非线性权与光滑度指标的函数关系不同而已。从这个视角, 既有利于对非线性格式发展路线的理解, 也有利于对非线性格式未来研究方向的把握。

参 考 文 献:

- [1] VAN LEER B. A historical oversight: Vladimir P. Kolgan and his high-resolution scheme[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(7): 2378–2383.
doi: 10.1016/j.jcp.2010.12.032
- [2] BORIS J P, BOOK D L. Flux-corrected transport. I: SHASTA, a fluid transport algorithm that works[J]. Journal of Computational Physics, 1973, 11(1): 38–69.
doi: 10.1016/0021-9991(73)90147-2
- [3] BOOK D L, BORIS J P, HAIN K. Flux-corrected transport II:

- Generalizations of the method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1975, 18(3): 248–283.
doi: [10.1016/0021-9991\(75\)90002-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(75)90002-9)
- [4] BORIS J P, BOOK D L. Flux-corrected transport. III: Minimal-error FCT algorithms[J]. *Journal of Computational Physics*, 1976, 20(4): 397–431.
doi: [10.1016/0021-9991\(76\)90091-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(76)90091-7)
- [5] ZALESAK S T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids[J]. *Journal of Computational Physics*, 1979, 31(3): 335–362.
doi: [10.1016/0021-9991\(79\)90051-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90051-2)
- [6] VAN LEER B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II: Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme[J]. *Journal of Computational Physics*, 1974, 14(4): 361–370.
doi: [10.1016/0021-9991\(74\)90019-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(74)90019-9)
- [7] VAN LEER B. Towards the ultimate conservative difference scheme III: Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow[J]. *Journal of Computational Physics*, 1977, 23(3): 263–275.
doi: [10.1016/0021-9991\(77\)90094-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(77)90094-8)
- [8] VAN LEER B. Towards the ultimate conservative difference scheme. IV: A new approach to numerical convection[J]. *Journal of Computational Physics*, 1977, 23(3): 276–299.
doi: [10.1016/0021-9991\(77\)90095-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(77)90095-X)
- [9] VAN LEER B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V: A second-order sequel to Godunov's method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1979, 32(1): 101–136.
doi: [10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
- [10] KOLGAN V P. Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite-difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(7): 2384–2390.
doi: [10.1016/j.jcp.2010.12.033](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.12.033)
- [11] HARTEN A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 135(2): 260–278.
doi: [10.1006/jcph.1997.5713](https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5713)
- [12] HARTEN A, ENGQUIST B, OSHER S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 71(2): 231–303.
doi: [10.1016/0021-9991\(87\)90031-3](https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90031-3)
- [13] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77(2): 439–471.
doi: [10.1016/0021-9991\(88\)90177-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90177-5)
- [14] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II[J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 83(1): 32–78.
doi: [10.1016/0021-9991\(89\)90222-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90222-2)
- [15] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 115(1): 200–212.
doi: [10.1006/jcph.1994.1187](https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187)
- [16] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126(1): 202–228.
doi: [10.1006/jcph.1996.0130](https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130)
- [17] BALSARA D S, SHU C W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 160(2): 405–452.
doi: [10.1006/jcph.2000.6443](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6443)
- [18] GEROLYMOS G A, SÉNÉCHAL D, VALLET I. Very-high-order WENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(23): 8481–8524.
doi: [10.1016/j.jcp.2009.07.039](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.07.039)
- [19] 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式[J]. *空气动力学学报*, 1988, 6(2): 143–165.
ZHANG H X. Non-oscillatory and non-free-parameter dissipation difference scheme[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1988, 6(2): 143–165. (in Chinese)
- [20] ZHANG H X, ZHUANG F G. NND schemes and their applications to numerical simulation of two- and three-dimensional flows[M]//*Advances in Applied Mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 1991: 193–256.
doi: [10.1016/s0065-2156\(08\)70165-0](https://doi.org/10.1016/s0065-2156(08)70165-0)
- [21] SHEN Q, ZHANG H X. A new upwind NND scheme for Euler equations and its application to the supersonic flow[C]//*Asian Workshop on CFD*, Sichuan, China, 1994.
- [22] CHENG J B, FU D X, MA Y W. Group velocity control scheme with low dissipation[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2000, 13(3): 138–145.
- [23] MA Y W, FU D X. Fourth order accurate compact scheme with group velocity control (GVC)[J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2001, 44(9): 1197–1204.
doi: [10.1007/BF02877439](https://doi.org/10.1007/BF02877439)
- [24] MA Y W, FU D X. Scheme construction with numerical flux residual correction (NFR) and group velocity control (GVC)[J]. *Progress in Natural Science*, 2006, 16(12): 1252–1259.
doi: [10.1080/10020070612330138](https://doi.org/10.1080/10020070612330138)
- [25] REN Y X, LIU M E, ZHANG H X. A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 192(2): 365–386.
doi: [10.1016/j.jcp.2003.07.006](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.006)
- [26] TU G H, DOCTOR Y X J, XIA Z Q, et al. A class of compact upwind TVD difference schemes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(6): 765–772.
doi: [10.1007/s10483-006-0607-1](https://doi.org/10.1007/s10483-006-0607-1)
- [27] DENG X G, MAEKAWA H. Compact high-order accurate nonlinear schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 130(1): 77–91.
doi: [10.1006/jcph.1996.5553](https://doi.org/10.1006/jcph.1996.5553)
- [28] DENG X G, MAO M L, DENG X G, et al. Weighted compact high-order nonlinear schemes for the Euler equations[C]//*13th Computational Fluid Dynamics Conference*, Snowmass Village, CO, USA. Reston, Virginia: AIAA, 1997.
doi: [10.2514/6.1997-1941](https://doi.org/10.2514/6.1997-1941)
- [29] 邓小刚. 高阶精度耗散加权紧致非线性格式[J]. *中国科学 (A 辑)*, 2001, 31(12): 1104–1117.
DENG X G. High-order precision dissipative weighted compact

- nonlinear scheme[J]. *Science in China, Ser. A*, 2001, 31(12): 1104–1117 (in Chinese).
- [30] DENG X G, ZHANG H X. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 165(1): 22–44.
doi: [10.1006/jcph.2000.6594](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6594)
- [31] DENG X G, MAO M, JIANG Y, et al. New high-order hybrid cell-edge and cell-node weighted compact nonlinear schemes: AIAA 2011-3857 [R]. Reston: AIAA, 2011.
- [32] 毛枚良, 姜屹, 闵耀兵, 等. 高阶精度有限差分方法几何守恒律研究进展[J]. *空气动力学学报*, 2021, 39(1): 157–167.
MAO M L, JIANG Y, MIN Y B, et al. A survey of geometry conservation law for high-order finite difference method[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2021, 39(1): 157–167 (in Chinese).
doi: [10.7638/kqdlxxb-2020.0111](https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2020.0111)
- [33] DENG X G, MAO M L, TU G H, et al. Extending weighted compact nonlinear schemes to complex grids with characteristic-based interface conditions[J]. *AIAA Journal*, 2010, 48(12): 2840–2851.
doi: [10.2514/1.j050285](https://doi.org/10.2514/1.j050285)
- [34] DENG X G, MAO M L, TU G H, et al. High-order and high accurate CFD methods and their applications for complex grid problems[J]. *Communications in Computational Physics*, 2012, 11(4): 1081–1102.
doi: [10.4208/cicp.100510.150511s](https://doi.org/10.4208/cicp.100510.150511s)
- [35] JIANG Y, MAO M L, DENG X G, et al. Effect of surface conservation law on large eddy simulation based on seventh-order dissipative compact scheme[J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2013, 419: 30–37.
doi: [10.4028/www.scientific.net/amm.419.30](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.419.30)
- [36] DENG X G, MAO M L, TU G H, et al. Geometric conservation law and applications to high-order finite difference schemes with stationary grids[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(4): 1100–1115.
doi: [10.1016/j.jcp.2010.10.028](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.10.028)
- [37] DENG X G, MIN Y B, MAO M L, et al. Further studies on Geometric Conservation Law and applications to high-order finite difference schemes with stationary grids[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 239: 90–111.
doi: [10.1016/j.jcp.2012.12.002](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.12.002)
- [38] MAO M L, ZHU H J, DENG X G, et al. Effect of geometric conservation law on improving spatial accuracy for finite difference schemes on two-dimensional non-smooth grids[J]. *Communications in Computational Physics*, 2015, 18(3): 673–706.
doi: [10.4208/cicp.250614.060215a](https://doi.org/10.4208/cicp.250614.060215a)
- [39] DENG X G. High-order finite difference schemes based on symmetric conservative metric method: decomposition, geometric meaning and connection with finite volume schemes[J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, 12(2): 436–479.
doi: [10.4208/aamm.0a-2017-0243](https://doi.org/10.4208/aamm.0a-2017-0243)
- [40] KAMIYA T, ASAHARA M, NONOMURA T. Application of central differencing and low-dissipation weights in a weighted compact nonlinear scheme[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2017, 84(3): 152–180.
doi: [10.1002/flid.4343](https://doi.org/10.1002/flid.4343)
- [41] FAN P, SHEN Y Q, TIAN B L, et al. A new smoothness indicator for improving the weighted essentially non-oscillatory scheme[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 269: 329–354.
doi: [10.1016/j.jcp.2014.03.032](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.03.032)
- [42] NONOMURA T, IIZUKA N, FUJII K. Freestream and vortex preservation properties of high-order WENO and WCNS on curvilinear grids[J]. *Computers & Fluids*, 2010, 39(2): 197–214.
doi: [10.1016/j.compfluid.2009.08.005](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2009.08.005)
- [43] SUMI T, KUROTAKE T. A new central compact finite difference formula for improving robustness in weighted compact nonlinear schemes[J]. *Computers & Fluids*, 2015, 123: 162–182.
doi: [10.1016/j.compfluid.2015.09.012](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.09.012)
- [44] NONOMURA T, FUJII K. Robust explicit formulation of weighted compact nonlinear scheme[J]. *Computers & Fluids*, 2013, 85: 8–18.
doi: [10.1016/j.compfluid.2012.09.001](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.09.001)
- [45] NONOMURA T, FUJII K. Effects of difference scheme type in high-order weighted compact nonlinear schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(10): 3533–3539.
doi: [10.1016/j.jcp.2009.02.018](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.02.018)
- [46] HENRICK A K, ASLAM T D, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 207(2): 542–567.
doi: [10.1016/j.jcp.2005.01.023](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.01.023)
- [47] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(6): 3191–3211.
doi: [10.1016/j.jcp.2007.11.038](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.11.038)
- [48] SHEN Y Q, ZHA G C. Improvement of the WENO scheme smoothness estimator[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2010, 64(6): 653–675.
doi: [10.1002/flid.2168](https://doi.org/10.1002/flid.2168)
- [49] HA Y, KIM C H, LEE Y J, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme with a new smoothness indicator[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 232(1): 68–86.
doi: [10.1016/j.jcp.2012.06.016](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.06.016)
- [50] ZHU J, QIU J X. A new fifth order finite difference WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 318: 110–121.
doi: [10.1016/j.jcp.2016.05.010](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.05.010)
- [51] ZHU J, SHU C W. A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 375: 659–683.
doi: [10.1016/j.jcp.2018.09.003](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.09.003)
- [52] TAYLOR E M, WU M W, MARTÍN M P. Optimization of nonlinear error for weighted essentially non-oscillatory methods in direct numerical simulations of compressible turbulence[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 223(1): 384–397.
doi: [10.1016/j.jcp.2006.09.010](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.09.010)
- [53] ZHOU Q A, HE F, SHEN M Y. A family of efficient high-order hybrid finite difference schemes based on WENO schemes[J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2012, 26(4): 205–229.
doi: [10.1080/10618562.2012.697157](https://doi.org/10.1080/10618562.2012.697157)
- [54] FU L, HU X Y, ADAMS N A. A family of high-order targeted ENO

- schemes for compressible-fluid simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 305: 333–359.
doi: [10.1016/j.jcp.2015.10.037](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.10.037)
- [55] FU L, HU X Y, ADAMS N A. A new class of adaptive high-order targeted ENO schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 374: 724–751.
doi: [10.1016/j.jcp.2018.07.043](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.07.043)
- [56] FU L, HU X Y, ADAMS N A. Targeted ENO schemes with tailored resolution property for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, 349: 97–121.
doi: [10.1016/j.jcp.2017.07.054](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.07.054)
- [57] FU L, TANG Q. High-order low-dissipation targeted ENO schemes for ideal magnetohydrodynamics[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, 80(1): 692–716.
doi: [10.1007/s10915-019-00941-2](https://doi.org/10.1007/s10915-019-00941-2)
- [58] SUBRAMANIAM A, WONG M L, LELE S K. A high-order and high-resolution nonlinear weighted compact scheme for compressible flows involving shocks and turbulence[C]// 23rd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Denver, Colorado. Reston, Virginia: AIAA, 2017: AIAA2017-4108.
doi: [10.2514/6.2017-4108](https://doi.org/10.2514/6.2017-4108)
- [59] WONG M L, LELE S K. High-order localized dissipation weighted compact nonlinear scheme for shock- and interface-capturing in compressible flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, 339: 179–209.
doi: [10.1016/j.jcp.2017.03.008](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.03.008)
- [60] YAN Z G, LIU H Y, MAO M L, et al. New nonlinear weights for improving accuracy and resolution of weighted compact nonlinear scheme[J]. *Computers & Fluids*, 2016, 127: 226–240.
doi: [10.1016/j.compfluid.2016.01.005](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2016.01.005)
- [61] 毛枚良, 燕振国, 刘化勇, 等. 高阶加权非线性格式的拟线性频谱分析方法研究[J]. *空气动力学学报*, 2015, 33(1): 1–9.
MAO M L, YAN Z G, LIU H Y, et al. Study of quasi-linear spectral analysis method of high-order weighted nonlinear schemes[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2015, 33(1): 1–9 (in Chinese).
doi: [10.7638/kqdlxxb-2014.0115](https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2014.0115)
- [62] 燕振国, 刘化勇, 毛枚良, 等. 三阶 HWCNS 的构造及其在高超声速流动中的应用[J]. *航空学报*, 2015, 36(5): 1460–1470.
YAN Z G, LIU H Y, MAO M L, et al. Development of 3rd-order HWCNS and its application in hypersonic flow[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2015, 36(5): 1460–1470. (in Chinese)
- [63] WONG M L, LELE S. Improved weighted compact nonlinear scheme for flows with shocks and material interfaces: algorithm and assessment: AIAA 2016-1807[R]. Reston: AIAA, 2016.
- [64] 郑世超. 高精度 WCNS 格式频谱特性研究与优化[D]. 长沙: 国防科技大学, 2021.
- [65] HU X Y, WANG Q, ADAMS N A. An adaptive central-upwind weighted essentially non-oscillatory scheme[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(23): 8952–8965.
doi: [10.1016/j.jcp.2010.08.019](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.08.019)

(本文责编: 徐燕)