第22卷 第4期
2004年12月

空 气 动 力 学 学 报
ACTA AERODYNAMICA SINICA

Vol.22, No.4
Dec.,2004

文章编号:0258-1825(2004)03-0470-05

非结构网格中 LU-SGS 隐式算法的非平衡性影响

赵松原,黄明恪

(南京航空航天大学,南京 210016)

摘要:在非结构网格中用 LU-SGS 隐式算法求解欧拉方程时,两个近似分解因子的项数可能相等,为平衡;也可能不相等,为非平衡。采用对网格重新编号的方法很难达到我们希望的平衡。本文对非平衡性的影响进行了探讨。对二维问题,四边形单元的非结构网格,设计出平衡与非平衡的编号方式。先对标量模型方程分析 LU-SGS 隐式算法的增长因子,然后通过数值试验来验证这种非平衡性的影响。结果表明,尽管非平衡时也能达到收敛,但平衡却远优于非平衡的情况。

关键词:Euler 方程;平衡性;LU-SGS 算法;

中图分类号:V211.41;O241.3 文献标识码:A

0 引 言

由于当前航空业需要计算的绕流问题的物形越来越复杂,采用结构网格比较麻烦,所以应用非结构网格有很大吸引力。但是采用隐式算法比较困难,因为很多高效算法都是基于结构网格而不是非结构网格。例如 Jameson 等人[1]对结构网格提出的 LU-SGS 隐式算法,不要求附加的存储,因子分解无论是二维还是三维情况都是两个因子,都能达到无条件稳定,而且一次迭代的机时比一次 Runge-Kutta 显式推进的机时还要短。Dmitri Sharov 和 Kazuhiro Nakahashi[2]通过对非结构网格进行重新编号,成功地将结构网格的 LU-SGS 隐式算法应用于非结构网格,取得很好的效果。

重新编号就是将生成好的单元编号进行重排序。对于 LU-SGS 隐式算法,要求一个网格单元的邻居编号,有比其大,也有比其小的。若具有大的编号的邻居的个数与具有小的编号的邻居的个数相同,则称之为平衡;否则,称为不平衡。平衡时,LU 分解的两因式项数相等,否则不相等。

文献[2]中提到了结构网格的 LU 分解是平衡的,并且提出非网格重新编号的方法,但也不能保证网格的平衡性。我们的实践表明,重新编号达到 LU-SGS 的算法要求并不难,但要达到完全平衡却很难。因此产生了一个问题,即是否一定要达到平衡?非平衡对收敛性有多大影响?对一般的非结构网格不容易做分析。为此,本文对二维问题的结构网格,采用非结构网格的处理方法设计出平衡与非平衡的编号方法。通过线化稳定性分析与数值试验两种途径,给出非平衡性对稳定性或收敛性的影响。

1 二维 Euler 方程隐式 LU-SGS 算法

考虑二维问题,对一个单元欧拉方程的全隐式算法的离散形式为:

$$V\frac{Q_i^{n+1}-Q_i^n}{\Delta t}+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{F}^{n+1}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{1}$$

其中 Q 为守恒变量在单元中的平均值,或格心处的值,V 为单元体积,F 为通量张量,$\mathrm{d}S$ 是边向量,其方向沿法线方向,大小为其边长,求和是对一个单元的 m 条边进行。用上式两端同时减去 $\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{F}^n\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$,并令 $\Delta Q_i=Q_i^{n+1}-Q_i^n$,$\Delta \boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_i^{n+1}-\boldsymbol{F}_i^n$,并采用逆风格式得到:

$$\boldsymbol{D}\Delta Q_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[\Delta\boldsymbol{F}_j\cdot\boldsymbol{S}_{ij}-\rho_A\,|\boldsymbol{S}_{ij}|\,\Delta Q_j\right]=Res \tag{2}$$

LU-SGS 隐式算法就是对上式中的隐式部分做近似因式分解,一个因子中含邻居编号大的项,另一因子中含邻居编号小的项。最终得到 LU-SGS 算法的两步格式为:

※ 收稿日期:2003-05-07; 修订日期:2004-01-30.
作者简介:赵松原(1979-),男,南京航空航天大学博士.

$$\Delta Q_i^* = \boldsymbol{D}^{-1}\{Res - \frac{1}{2}\sum_{j\in L}[\Delta \boldsymbol{F}_j^* \cdot \boldsymbol{S}_{ij} - \rho_A \mid \boldsymbol{S}_{ij} \mid \Delta Q_j^*]\} \tag{3}$$

$$\Delta Q_i = \Delta Q_i^* - \frac{1}{2}\boldsymbol{D}^{-1}\sum_{j\in U}[\Delta \boldsymbol{F}_j \cdot \boldsymbol{S}_{ij} - \rho_A \mid \boldsymbol{S}_{ij} \mid \Delta Q_j] \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{D} = (\frac{V}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\rho_A \mid \boldsymbol{S}_{ij} \mid)\boldsymbol{I}$，是对角矩阵。$Res$ 是第 n 次迭代残量项，计算时采用 Jameson 的中心差分加耗散的方法来替代逆风格式。L 与 U 分别对应编号小和大的邻居单元。ρ_A 是通量 Jacobian 矩阵的谱半径。实际计算时，如果已知第 n 次迭代的守恒量 Q_i^n，则第一步对编号逐一增大的方向掠过流场找出 ΔQ_i^*；第二步对于编号逐一减小的方向掠过流场，找出 ΔQ_i。则第 $n+1$ 次迭代的守恒量 Q_i^{n+1} 为：$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \Delta Q^i$，从而完成一次迭代。

2　平衡性对增长因子影响的分析

从上面的公式可以看出，基于非结构网格的 LU-SGS 算法需要满足下面的要求：每一个单元的邻居的编号要有比其大的也要有比其小的。因此在对网格编号的过程中，就会遇到平衡性的问题。三角形单元有三个邻居，其编号大小之比只能是 1:2 或 2:1，所以无论怎样编号都不会取得平衡。对一般的非结构网格，很难设计出完全平衡的编号方式。而四边形的网格则可以使得编号大小之比达到 2:2，即达到平衡。因此本文采用四边形结构网格，将其非结构化，采取一定的编号方法就可以使网格分别达到平衡与不平衡的状况。

下面讨论上述网格的不平衡性对 LU-SGS 隐式算法的增长因子的影响。为了分析的简化，考虑如下线性标量模型问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

将其用于四边形的网格，并假设网格为正方形。此时，LU-SGS 隐式算法中的 $V = h^2$，$\mid \boldsymbol{S}_{ij} \mid = h$，$Q = u$，$\boldsymbol{F} = ui + uj$。分别考虑下面几种情形。

2.1　平衡情形

若一组对边的邻居为编号小的，另一组对边的邻居为编号大的。令 $u_{i,j}^n = V^n(k)e^{ipx}e^{iqy}$，$\Delta t = \lambda h$ 则 $D = h(\frac{1}{\lambda} + 2)$。等式(2)右端的残值采用中心差分近似，并且不考虑耗散项。不难得到增长因子：

$$G = \frac{V^{n+1}}{V^n} = \frac{\frac{1}{\lambda} + 2 - (\cos ph + \cos qh)}{\frac{1}{\lambda} + 2 - (\cos ph + \cos qh) + i(\sin ph + \sin qh)} \tag{6}$$

比较分子与分母，二者实部相同，但分母多出虚部，因此恒有 $\mid G \mid \leqslant 1$，即无条件稳定。

2.2　非平衡情形

若四条边中有三条边的邻居为编号小的，另一条边的邻居为编号大的，即一大三小。此时的增长因子与平衡时完全一致，也达到无条件稳定。

若四条边中有三条边的邻居为编号大的，另一条边的邻居为编号小的，即一小三大。此时的增长因子为：

$$G = \frac{\frac{1}{\lambda} + 2 - (\cos ph + \cos qh) + \frac{\lambda}{1+2\lambda}(\cos(ph+qh) - i\sin(ph+qh))}{\frac{1}{\lambda} + 2 - (\cos ph + \cos qh) + i(\sin ph + \sin qh) + \frac{\lambda}{1+2\lambda}(\cos(ph+qh) - i\sin(ph+qh))} \tag{7}$$

其他的不平衡情况的增长因子不外乎上述两种情况，即或者与平衡时相同，或者与(7)式相同。下面讨论(7)式。其中分子与分母的实部相同，所以只要比较分子分母虚部绝对值的大小就可以看出增长因子是否大于 1。分子的虚部为 $-\frac{\lambda}{1+2\lambda}\sin(ph + qh)$，分母的虚部为 $-\frac{\lambda}{1+2\lambda}\sin(ph+qh) + \sin ph + \sin qh$，可以证明在很多情况下，例如当 ph 等于 1，qh 等于 4.9 时，分母虚部的绝对值小于等于分子虚部的绝对值，有 $\mid G \mid > 1$，所以此时为无条件不稳定。

2.3　另一种平衡情形

若相邻的两条边的邻居为编号小的，另两条相邻边的邻居为编号大的。此时的增长因子也为(7)式，为无条件不稳定。但这种平衡情形不可能大量出现，最多在个别孤立的单元中发生。

至此我们可以看出，平衡与否对 LU-SGS 算法的增长因子的影响是很大的。从总体上可以看出，平衡时的增长因子不超过 1，达到无条件稳定，不平衡时则有时会稳定有时不稳定，所以说平衡还是要优于不平衡的情况的。欧拉方程是非线性的向量方程，而以

上的分析是基于线性的标量模型方程，特别是没有考虑耗散项和边界条件，具有局限性。例如：在实践中用得很成功的三维 ADI 隐式算法，用线化模型做线性稳定性分析，却得到无条件不稳定的结果[1]。但上述分析已表明平衡要优于非平衡，所以下面再通过具体的数值试验来验证非平衡对计算收敛性的影响。

3 数值试验

为了验证非平衡性对 LU-SGS 算法收敛速度的影响，下面设计一个数值实验，分别考虑平衡与不平衡情况的影响。这里采用生成好的四边形结构网格，而数据结构则采用非结构网格的数据结构。通过重新编号的方法可以使网格分别达到平衡与不平衡的情况。采用保角转绘生成的 O 型网格，平衡的情况很容易得到，只要将网格自然编号就可以。如图 1 所示，除交接处外，每一个网格都有两个比其大的编号，也有两个比其小的编号。也就是说网格总体上是平衡的。不平衡的情况则需要采取一定的策略，办法有很多。如图 2 所示的跳跃式的编号：每一层都对网格进行跳跃式编号，这样就得到了一种完全不平衡的编号。即每一个网格单元都是不平衡的。

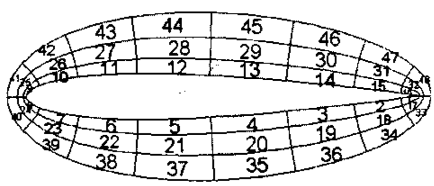

图 1 平衡的网格编号

Fig.1 Ordering of balance grid

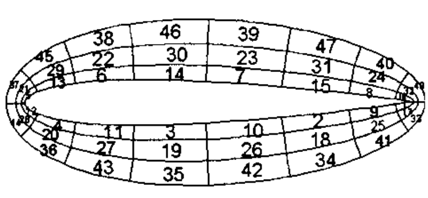

图 2 不平衡的网格编号

Fig.2 Ordering of imbalance grid

现在就可以将重新编号后的网格与 LU-SGS 隐式算法结合起来对流场进行计算，并与龙格库塔显式计算做比较。算例采用 RAE 2822 翼型，NACA 0012 翼型和一个两段翼型的例子。

3.1 RAE 2822 翼型

在马赫数 $M=0.75$，迎角 $\alpha=3°$的情况下，考虑 RAE 2822 翼型。图 3 为收敛曲线的比较，可以看出 LU-SGS 算法在平衡时要比显式格式快，而且平衡的情况要比不平衡的情况要好。图 4 为压力曲线。

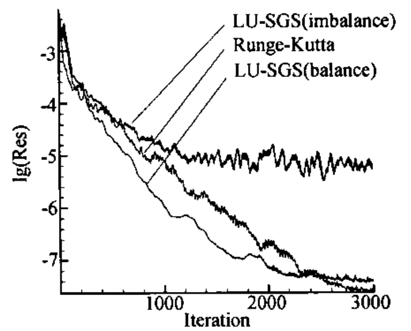

图 3 收敛历史的比较

Fig.3 Comparison of convergence history

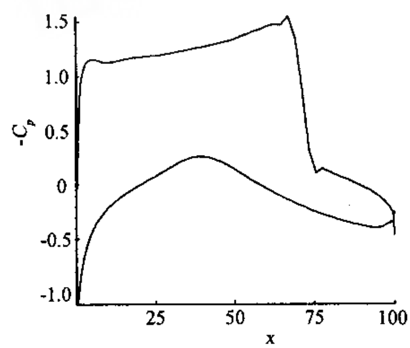

图 4 压力曲线（$M=0.75$，$\alpha=3°$）

Fig.4 C_p distribution（$M=0.75$，$\alpha=3°$）

3.2 NACA 0012 翼型

分别考虑马赫数 $M=0.8$，迎角 $\alpha=1.25°$和马赫数 $M=1.2$，迎角 $\alpha=0°$的情况。计算的结果如图 5—图 8 所示。图 5 为马赫数 $M=0.8$，迎角 $\alpha=1.25°$时，龙格库塔、LU-SGS（不平衡）、LU-SGS（平衡）三种计算方法收敛历史的比较。很明显 LU-SGS 算法要比显式格式快很多。而且由于隐式格式每一步迭代的时间要比显式格式少，所以整个的计算机时也会大大减少。图 6 为压力分布曲线，图 7 为马赫数 $M=1.2$，迎角 $\alpha=0°$时，龙格库塔、LU-SGS（不平衡）、LU-SGS（平衡）三种计算方法收敛历史的比较。从图中可以看出，由于龙格库塔格式在超音速时的时间步长可以取得较大，所以龙格库塔和 LU-SGS（平衡）的收敛曲线几乎相同，但平衡仍就远优于不平衡。图 8 为等马赫数分布曲线。计算结果与国外同类结果符合较好。

3.3 考虑一个两段翼型的例子

如图 9 所示，翼型都是 NACA 0012，距离为弦长的一半。计算马赫数 $M=0.8$，迎角 $\alpha=0°$时情况。

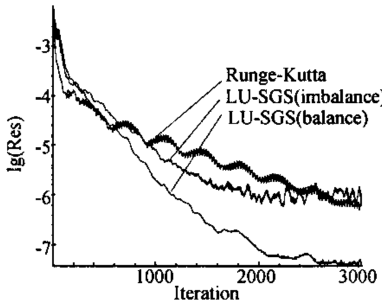

图 5　收敛曲线的比较($M = 0.8$，$\alpha = 1.25°$)

Fig.5　Comparison of convergence history($M = 0.8$，$\alpha = 1.25°$)

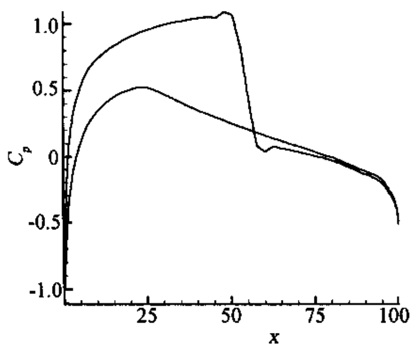

图 6　压力曲线($M = 0.8$，$\alpha = 1.25°$)

Fig.6　C_p distribution ($M = 0.8$，$\alpha = 1.25°$)

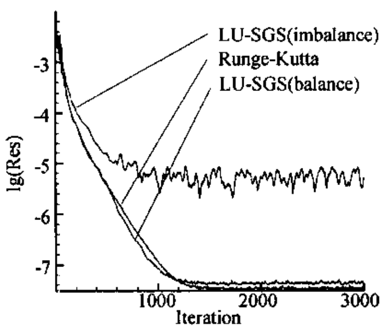

图 7　收敛曲线的比较($M = 1.2$，$\alpha = 0°$)

Fig.7　Comparison of convergence history($M = 1.2$，$\alpha = 0°$)

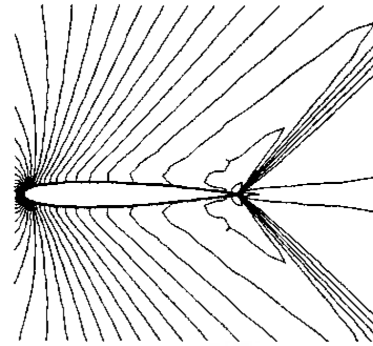

图 8　等马赫数分布($M = 1.2$，$\alpha = 0°$)

Fig.8　Mach contours($M = 1.2$，$\alpha = 0°$)

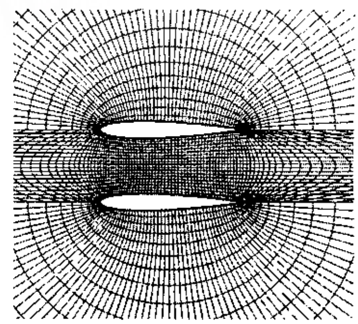

图 9　两段翼型的网格

Fig.9　Grid of two airfoil

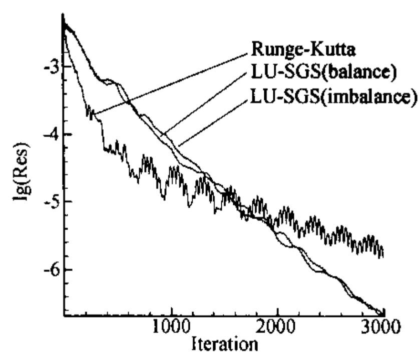

图 10　收敛历程

Fig.10　Comparison of convergence history

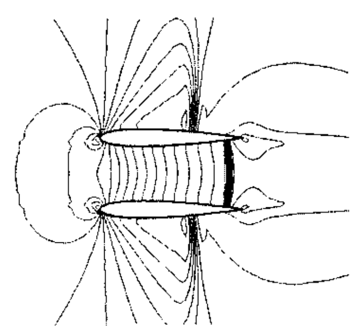

图 11　等马赫数分布($M = 0.8$，$\alpha = 0°$)

Fig.11　Mach contours ($M = 0.8$，$\alpha = 0°$)

计算所用的网格如图 9 所示。整个区域可以分成上中下三部分。上下两部分的网格采用保角转绘方法生成的网格，中间的则采用结构网格的代数生成法。网格生成之后，对全流场网格进行统一编号，将分区的结构网格变成整体的非结构网格，就可以用非结构网格的方法对其进行计算。编号的方法是将整个区域分为两部分，上下部分仍然可以看作 O 形网格，中间部分则顺次排序，最后将两部分组合即可。计算的结果如图 10、11 所示。图 10 为显式格式与隐式格式收敛历史的比较。该例的网格在交接处不光

滑。对这类质量很差的网格,隐式格式不论平衡与否都优于龙格库塔显式格式,而且平衡与不平衡的收敛曲线几乎相同。图 11 为等马赫数分布。

3.4 真实非结构网格的计算

三角形的非结构网格无论怎样排序都不会取得平衡。本课题组王波兰在其论文[6]中针对二维的非结构三角形网格进行重排,并结合 LU-SGS 方法对不同实例进行计算,并将结果和四步 Runge-Kutta 显式计算的结果进行了收敛历程的比较。证明了不平衡情况下该方法的可行性,而且大部分情况下 LU-SGS 法都明显优于龙格库塔法。特别是在粘性网格的计算中 LU-SGS 法仍然有很好的收敛性,体现了该方法在粘性计算方面的潜力。

4 结 论

本文通过将网格重新排序,分别达到平衡与不平衡的情况,分析了 LU-SGS 算法的增长因子,并结合 LU-SGS 算法应用于 3 个不同的算例。由数值试验结果可以看出,无论平衡与否都能收敛,但是平衡与否对收敛的速度却有很大的影响,通过对收敛曲线的比较可以看出,大部分情况下明显的平衡比不平衡收敛的速度要快。另外,实际计算中不平衡也能收敛这一结论,对实际的工作是非常有意义的,可以减小排序的难度。因为很多情况下非结构网格的重新编号很难甚至不可能达到平衡。

第二,对于复杂的区域,网格可以分块生成。通过重新编号的方法,可以把分块的结构网格统一编号成为一个整体的非结构网格,对全流场进行统一计算,降低了处理复杂区域问题的难度。

第三,由两段翼型的例子可以看出,LU-SGS 算法对网格的要求不高,在网格质量不好的情况下,一样可以收敛,而且明显优于显式算法。所以可以预测隐式算法在 N-S 方程的粘性计算中会取得更好的效果。

参 考 文 献:

[1] JAMESON A, YOON S. Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the Euler equations [J]. *AIAA Journal*. 1987,(7):929-935.

[2] DMITRI S, KAZUHIRO N. Reordering of 3-D hybrid unstructured grids for vectorized LU-SGS Navier-Stokes computations [R]. AIAA-97-2102.

[3] 黄明恪. Jameson 有限体积法对非结构网格推广的改进 [J]. 空气动力学学报,1999,17(1):15-20.

[4] WILLIAM J C. Efficient real gas Navier-Stokes computations of high flows using an LU scheme [R]. AIAA-90-391.

[5] STOLICS L, JOHSTON L J. Solution of the Euler equations on unstructured grids for two-dimensional compressible flow [J]. *Aeronautical Journal* June/July 1990.

[6] 王波兰. 二维非结构网格 Euler 方程的 LU-SGS 算法[D]. [硕士学位论文]. 南京航空航天大学,2003.

Effects of imbalance of LU-SGS implicit algorithm using unstructured grid

ZHAO Song-yuan, HUANG Ming-ke

(*Naning University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing* 210016, *China*)

Abstract: Solving the Euler equation with LU-SGS implicit algorithm on unstructured grids, mesh reordering will bring on imbalance. If the two approximately-factored items are equal, we call it balance; if not equal, it is imbalance. And it is difficult to achieve full balance we hope by mesh reordering. This paper investigates the effects of imbalance on convergence. For two- dimensional problems, two reordering methods are designed for the quadrangular-grid: One is balance and the other is imbalance. First the amplification factor of the LU-SGS implicit algorithm is analyzed for scalar function. Then we validate the effects through numerical test. The results show that balance is superior to imbalance and imbalance can also achieve convergence.

Key words: Euler equation; LU-SGS algorithm; balance