

文章编号 0258-1825(2001)01-0075-08

WENO 格式在稳态问题中的应用

侯中喜, 梁剑寒, 王承尧

(国防科技大学航天与材料工程学院 湖南长沙 410073)

摘要 高阶、高分辨率的 WENO 格式大大加强了对于复杂流场结构的分辨能力和计算精度, 但计算时间较 TVD 格式有了明显的增加。近似隐式分裂的 LU 方法能够加快求解稳态问题的收敛速度。本文结合 WENO 格式和 LU 方法实现了求解稳态问题的有效方法, 它使得求解稳态问题在收敛速度和计算精度上都有了较大的提高。通过算例的数值分析可以看出, 上述方法不但收敛速度有了明显的提高, 而且对于复杂流动现象仍然具有良好的分辨能力。

关键词: WENO; 近似隐式分裂; 定常流动; 复杂流动结构

中图分类号: V211. 1 **文献标识码**: A

0 引 言

现代计算流体力学所处理的问题范围越来越广, 流动特征越来越复杂, 其中一些问题合理、正确的模拟对计算格式提出了较高的要求。现今一般认为^[7, 8, 11]采用高阶格式不但可以降低对网格规模的苛刻要求, 而且能够正确分辨其中复杂的流动现象。

WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory)^[2] 格式是 1994 年由 LIU, Osher 等人在 ENO (Essentially Non-Oscillatory)^[1] 构造思想的基础上提出的。ENO 格式具有在间断区分辨率高, 在光滑区计算精度高等优点, 但也存在着一些不足之处。主要存在的问题有: 模板自适应选择的结果可能在差商相差很小的情况下发生改变, 而候选模板可能都是光滑的, 因而模板选择的变动使计算的残差难于收敛的很好; 在光滑区格式由于对部分模板的舍弃, 导致对模板的利用效率较低, 相应的计算效率也较低。WENO 格式通过引入变化的加权因子, 使格式在光滑区解的截断误差阶数有了进一步的提高, 而在间断附近仍然保持了 ENO 格式同等良好的分辨能力, 但计算花费却增加的不多。

WENO 格式自提出以来已有了长足的发展, 近几年其理论的发展和一些实际算例表明^[2, 3, 9, 11]: WENO 格式在光滑区具有较高的阶数, 在间断前后基本无振荡, 并且对间断有较高的分辨率, 格式在不同网格系统下也有较好的稳定性, 特别适合计算包含各类间断和含有多种复杂流动光滑结构以及二者相互作用的流场。

近似隐式分裂的 LU 方法是通过隐式处理和通量的特殊分裂实现的。在实际计算中它是采用显式方法求解的, 但由于自身隐式的性质放大了稳定性限制, 从而加快了求解速度, 但方

法在时间方面的精度较低,适合于采用时间相关法计算的稳态问题。WENO 格式虽然有良好的性质,但计算工作量较 TVD 格式有了较大的增长。在实际应用中,对于稳态问题如果时间方面仍然采用高精度的方法处理,则会更加突出计算花费的矛盾,从而限制格式的应用。对于稳态问题,收敛过程中时间方面的精度并没有特别的限制,仅仅要求稳定、收敛即可,因而可以结合 WENO 格式和 LU 方法实现对稳态问题的求解。

本文结合了近似隐式的 LU 方法和 WENO 格式发展了适用于稳态问题的高阶方法,它放大了计算稳定性的限制,从而起到了加快收敛的目的,但又保持了格式在空间方面的精度和分辨率。通过算例的计算分析,可以看出上述方法不但在收敛速度有了明显的提高,而且对于流动现象仍然具有良好的分辨能力。

1 数值方法

1.1 WENO 格式基本概要和处理方法

1.1.1 WENO 格式的重构、平均和模板的加权三个基本方法

函数的平均:即在一个区域内函数的平均值。

函数的重构:是在已知函数分段平均值的情况下,构造满足一定精度下的原函数分布。

模板的加权:采用 ENO 方法计算出每个模板的重构值后,在光滑区可以利用这些值的组合对函数进行新的高阶近似。但为了避免跨越间断插值引起数值振荡,需要通过权值限制选择模板,即剔除“不光滑”的模板。这里“模板”指所选重构点的区域。

1.1.2 WENO 的计算方法和步骤

以一维守恒问题 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ 的初值问题为例,介绍有限差分方法的 WENO 基本计算步骤:直接在单元点 x_i 处采用半离散的守恒差分近似有 $\frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i}(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}})$

式中 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{f}(u_{i-r}, \dots, u_{i+s})$, 若取 $f(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} h(\xi) d\xi = \bar{h}(\xi)$, 则有

$$f'(x) = \frac{1}{\Delta x} [h(x + \frac{\Delta x}{2}) - h(x - \frac{\Delta x}{2})]$$

由上面分析可以看出,函数 $f(x)$ 的点值 $f(x_i)$ 是 $h(x)$ 在区间 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ 的平均值,因而可以采用 ENO 重构的方法得到 $h(x)$ 的函数分布。只需取 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = h(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k)$ 即可解问题。

按 ENO 的方法重构 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$, 可以得到 k 个重构值,合理利用它们可以得到 $\hat{f}(x_{i+\frac{1}{2}})$ 的高阶近似。WENO 采用 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$ 的凸组合来近似 $\hat{f}(x_{i+\frac{1}{2}})$ $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$ $0 \leq \omega_r \leq 1$ 。

在 WENO 方法中,权值 ω_r 的计算应该能够反应模板的光滑程度,对于“非光滑”模板权值应近似为零;在光滑区模板权值应近似等于最优值,以进一步提高格式精度。

1.2 流通向量的 Roe 处理方法

流通向量采用线化的 Riemann 方法处理,以 x 方向的为例:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} (\hat{E}_{i+1/2} - \hat{E}_{i-1/2}) \quad \text{由对流项性质可知有 } E = AU$$

$$\overline{A}(U_i, U_{i+1}) = \overline{R} \overline{\Lambda} \overline{L} = \overline{R} (\overline{\Lambda}^+ + \overline{\Lambda}^-) \overline{L} = \overline{R} \overline{\Lambda}^+ \overline{L} + \overline{R} \overline{\Lambda}^- \overline{L} = \overline{A}_{i+1/2}^+ + \overline{A}_{i+1/2}^-$$

$$\hat{E}_{i+1/2} = (\overline{A}^+ + \overline{A}^-) \hat{U}_{i+1/2} = \overline{A}_{i+1/2}^+ \hat{U}_{i+1/2} + \overline{A}_{i+1/2}^- \hat{U}_{i+1/2}$$

$$\text{式中带“} - \text{”上标的为 Roe 平均的物理量: } \overline{F} = \frac{F^+ \sqrt{\rho^+} + F^- \sqrt{\rho^-}}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}}$$

1.3 近似隐式分裂的 LU 方法

近似隐式分裂的方法主要用于通过时间相关法来计算稳态问题,即通过加大计算时间步长使计算快速达到稳态解。这是一种隐式的方法,因而计算比较稳定,但实际计算是通过显式方法进行的。

基本处理方法(以二维守恒型方程为例)在差分计算中,可以取对流项作隐式处理

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_{i,j,k}^n + \left[\frac{\partial E}{\partial x} \right]_{i,j,k}^{n+1} + \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{i,j,k}^{n+1} = RHS_v^n$$

将上述方程中的对流项在时间为 n 处展开,有

$$E_{i,j,k}^{n+1} = E_{i,j,k}^n + \left[\frac{\partial E}{\partial U} \right]_{i,j,k}^n \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_{i,j,k}^n \Delta t + O(\Delta t^2) = E^n + A^n \delta U^n + O(\Delta t^2) \quad (1)$$

式中 $\delta U^n = U_{i,j,k}^{n+1} - U_{i,j,k}^n$, 同理可以处理另外两个方向的流通向量,再将它们代入到方程

$$(1) \text{ 中, 得到: } \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_{i,j,k}^n + \left[\frac{\partial A \delta U}{\partial x} \right]_{i,j,k}^n + \left[\frac{\partial B \delta U}{\partial y} \right]_{i,j,k}^n = RHS^n \quad (2)$$

方程(2)右边 RHS^n 中包含了对流项分裂出的显式部分和原先方程右边的显式部分 RHS_v^n , 显式对流项可以采用前面介绍的 WENO 方法处理。对左边隐式部分进行系数矩阵分裂处理, 即对 A、B 矩阵进行分裂处理(这里分裂的方法采用最大特征值法), 将分裂的矩阵代入到方程(2)中, 再合并整理得:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} + \left[\frac{\mathcal{A}(A)}{\Delta x} + \frac{\mathcal{A}(B)}{\Delta y} \right] \right] \delta U_{i,j,k} + \frac{1}{\Delta x} ((A^- \delta U)_{+1} - (A^+ \delta U)_{-1}) + \frac{1}{\Delta y} ((B^- \delta U)_{+1} - (B^+ \delta U)_{-1}) = RHS^n$$

将上述差分方程采用近似处理的方法分成两步进行计算即可

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\Delta t} + \left[\frac{\mathcal{A}(A)}{\Delta x} + \frac{\mathcal{A}(B)}{\Delta y} \right] \right] \delta U_{i,j,k}^* &= \frac{1}{\Delta x} ((A^+ \delta U)_{i-1}^*) + \frac{1}{\Delta y} ((B^+ \delta U)_{j-1}^*) + RHS^n \\ \left[\frac{1}{\Delta t} + \left[\frac{\mathcal{A}(A)}{\Delta x} + \frac{\mathcal{A}(B)}{\Delta y} \right] \right] \delta U_{i,j,k} &= \left[\frac{1}{\Delta t} + \left[\frac{\mathcal{A}(A)}{\Delta x} + \frac{\mathcal{A}(B)}{\Delta y} \right] \right] \delta U_{i,j,k}^* - \frac{1}{\Delta x} ((A^- \delta U)_{i+1}) - \\ &\quad \frac{1}{\Delta y} ((B^- \delta U)_{j+1}) \end{aligned}$$

2 算例及分析

2.1 超声速半圆柱绕流

问题: 来流为马赫数 3 的超声速半圆柱绕流。初始条件取马赫数 3 的均匀流, 计算条件: WENO 方法计算时 CFL 数取 0.5, 对于 LU 和 WENO 结合的方法 CFL 数分别取 2、4、10 和 200。

图 1 给出 WENO 和 WENO LU 方法分别在 CFL 数为 0.5 和 200 时计算结果的等压线分布 , 可以看出 WENO LU 方法在较大的 CFL 数下 , 依然能够清晰的分辨头部激波。图 2 给出了 WENO 和 WENO LU 方法在不同 CFL 数下的残差收敛史 , 可以看出所有计算都收敛了 , 但残差收敛的大小不同 , 不同的方法收敛的速度也不同 , 采用了 LU 方法后大大加快了收敛速度 , 但 CFL 大到一定程度时收敛速度的增加并不明显 , 相应的收敛残差变大 , 为此在实际使用中一般取 2 到 4 左右就可以了。

表 1 不同格式在半圆柱绕流中迭代 40 步计算时间和比例

Table 1 Calculating time and time scale in cylinder problem of different scheme

Method	WENO	WENO LU	NND	NND LU
计算时间(s)	86	31	25.5	14
比例	3.373	1.216	1	0.55

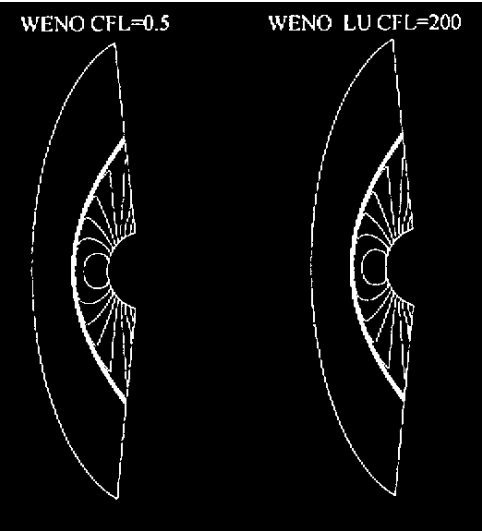


图 1 计算结果压力等值线

Fig.1 Pressure contour of calculating step

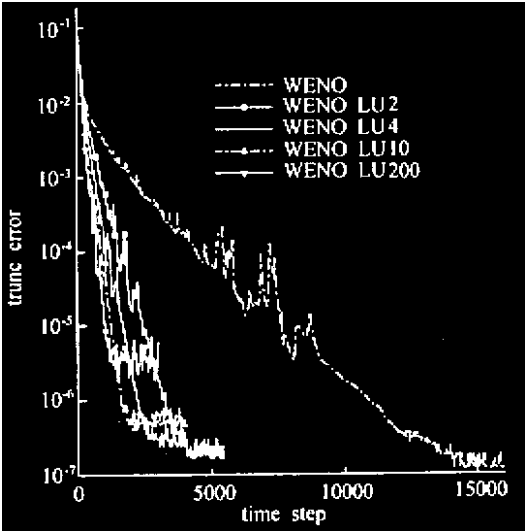


图 2 不同条件下残差收敛史

Fig.2 Truncated error history of different algorithm follow calculating step

在计算过程中 , 对不同方法迭代 40 步所需时间进行了分析 , 如表 1 所示 , 表中还给出了以 NND 格式计算时间为参照的比例。可以看出未采用 LU 方法的 5 阶 WENO 格式单步计算时间是 NND 格式的 3.373 倍 , 若计算一个问题达到收敛时 , 各格式需要相同的计算步 , 则 WENO 格式的总计算时间约为 NND 格式的 3.373 倍 , 在这个问题的计算中 WENO 格式收敛需要的步数还略高于 NND 格式 , 综上可以看出高阶格式的计算性能是较差的。当结合了 LU 方法后 , WENO 格式单步的运行时间大大减少了 , 仅为 NND 格式的 1.216 倍 , 而且从图 2 残差的收敛史上看 , 收敛的步数较原 WENO 格式也大大减少了 , 因此总的收敛时间能成数量级的下降 , 因此在分析稳态问题时 , 高阶格式结合近似隐式分裂的 LU 方法提高计算效率是相当重要的 , 它能在一定程度上克服高阶格式计算代价高的缺点 , 但也应看到二阶 TVD 格式的效率还是高于高阶格式 , 如 NND 在采用了 LU 方法后计算比例仅为 0.55 , 虽然同 WENO LU 方法差距缩小了 , 但

差距还是比较明显的,因此可以说高阶格式“高阶”的代价是计算效率的降低,这就要求对高阶格式的研究更需要关注和研究提高算法效率的一些问题,这样才能真正将高阶格式推向应用。

2.2 二维轴对称 JPL 喷管

算例 :美国喷气推进实验室的 JPL 喷管^[12]。JPL 是一锥形喷管,具体喷管尺寸参见文献 [12]。实验表明 :在喉部最小截面的中心处,马赫数约为 0.8,而在壁面处达到了 1.4,在壁面二阶导数不连续处和下游邻近区域,马赫数先下降然后再上升,一桶形弱激波由间断处开始,并延伸至下游。计算条件 :分别采用 5 阶 WENO 方法,CFL 数取 0.4;WENO LU 方法,CFL 数取 2;5 阶 WENO 方法,计算时间步长采用跨声速常用的当地时间步长,CFL 数取为 0.4。

图 3、图 4 分别给出了 NND 和 WENO 格式计算的喷管流动的等马赫线图,两种格式都清晰的给出了压缩波的生成与反射现象,WENO 格式分辨的更为清晰一些;图 5 给出了 WENO LU 格式计算的轴上和壁上马赫数分布图,图中清晰地反应出了喷管中流动的不均匀性,在喷管喉部处轴线上马赫数近似为 0.8,而在壁面上近似为 1.4,同实验基本吻合。

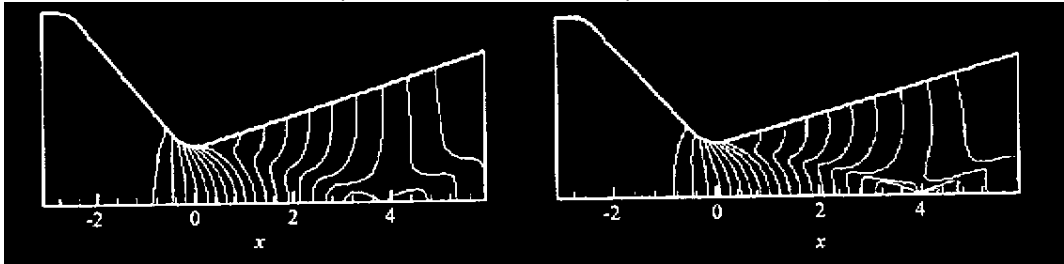


图 3 JPL 喷管流动的等马赫线(NND 格式)

图 4 JPL 喷管流动的等马赫线(WENO LU 格式)

Fig.3 Mach contour in JPL nozzle flowfield (NND)

Fig.4 Mach contour in JPL nozzle flowfield (WENO LU)

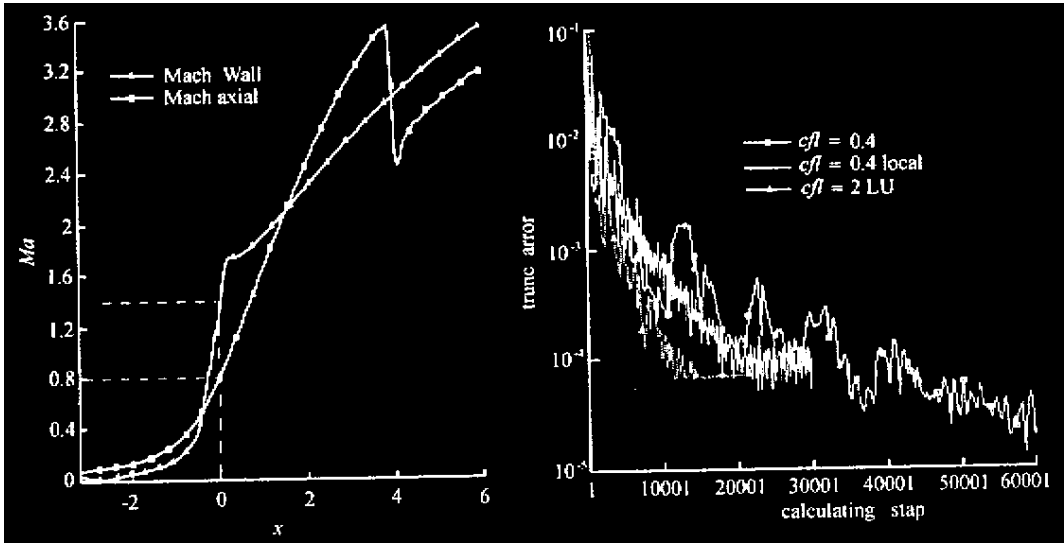


图 5 喷管轴上、壁上马赫数分布(WENO LU)

图 6 不同算法的收敛史

Fig.5 The Mach number on axis and wall in nozzle(WENO LU)

Fig.6 Converging history of different algorithms

万方数据

图 6 给出了三种不同方法由相同初场(按一维喷管型面给定参数分布)计算的收敛史图,可以看出对于跨声速问题计算较难收敛,在计算中可以看出亚声速区域振荡较为频繁,收敛曲线上也反应出了这种振荡。计算中 5 阶 WENO 在 60000 步的时候,残差仍然未完全收敛;采用 WENO LU 方法,计算在 15000 步左右稳定下来,但残差较大约为 7.0×10^{-5} 左右;采用当地时间步长的 WENO 方法,计算在 21000 步左右收敛,但残差的波动较大。通过上述的比较可以看出:跨声速问题的计算较难收敛,直接采用 WENO 方法会带来较为繁重的计算任务;采用当地时间步长的方法能够加快收敛,但计算的波动也较大;采用 WENO LU 方法能够有效地改善收敛速度,它比采用当地时间步长的方法收敛更快,波动也更小。

2.3 轴对称反喷管

问题:轴对称反喷管流动模拟^[12]。因喷管结构形式较为特殊因而流场图象较为复杂。图 7 给出了采用 WENO LU 方法在 CFL 数为 2 时计算的流场等马赫线分布,对比文献[12]可以看出计算对流场的分辨更为清晰,文献[12]中采用的是 MacCormack 格式。可以看出采用了 LU 方法的 WENO 格式对于复杂流动结构分辨的仍然较为清晰。

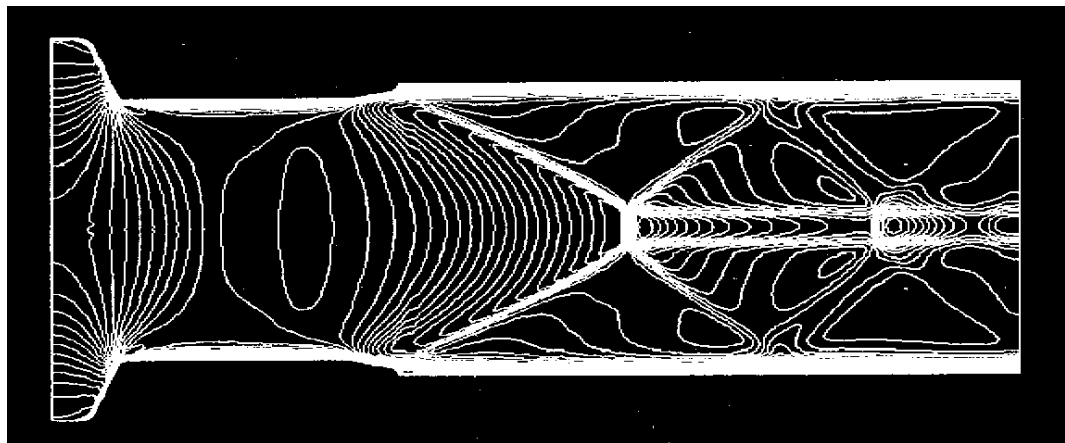


图 7 反喷管流场等马赫线图(WENO LU CFL=2)

Fig. 7 The Mach contour of scarfed nozzle flowfields (WENO LU CFL=2)

2.4 三维喷管流动

问题:三维截面为矩形的喷管流动,喷管尺寸参考图 8。计算分为 5 阶, WENO 格式 CFL 数取 0.5, WENO LU 方法 CFL 数取 2。

图 9 给出了喷管中心 Z-Y 截面等密度线分布,可以看出计算正确地反应了喷管拐角的压缩特性。图 10 给出了 WENO LU 方法和 5 阶 WENO 方法计算的收敛史,从图中可以看出:采用 LU 方法在 10000 步左右就能够使残差收敛到 1.0×10^{-6} 以下,而相应的 WENO 格式则在 25000 步时,仍然收敛不到上述水平,而且受亚声速区声波来回振荡的影响计算波动还较明显,在收敛曲线上表现为明显的反复振荡下降。在相同条件下, NND 格式计算 6 步为 85s, WENO 格式为 266s, WENO LU 方法为 98s, NND LU 方法为 70s,可以看出在计算时间上 WENO LU 方法节省了大量的计算时间,加之收敛步数大大的减少了,因而在三维问题中采用 WENO LU 方法计算时

间的节省是相当明显。

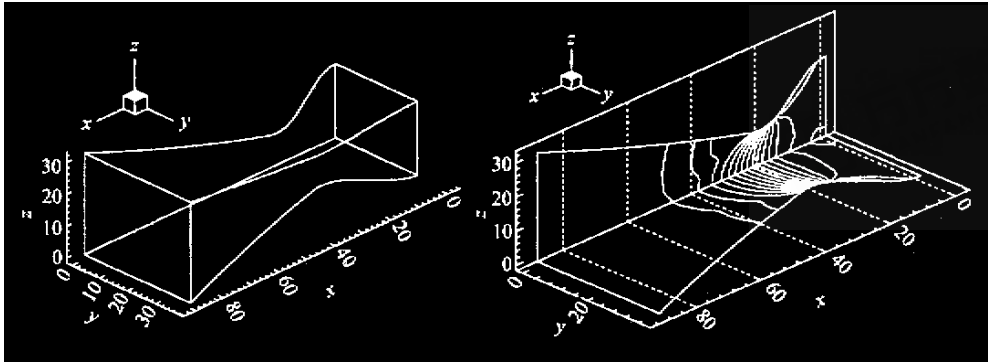


图 8 三维喷管结构图

图 9 三维喷管等压线图

Fig.8 3D nozzle structure

Fig.9 3D nozzle pressure contour

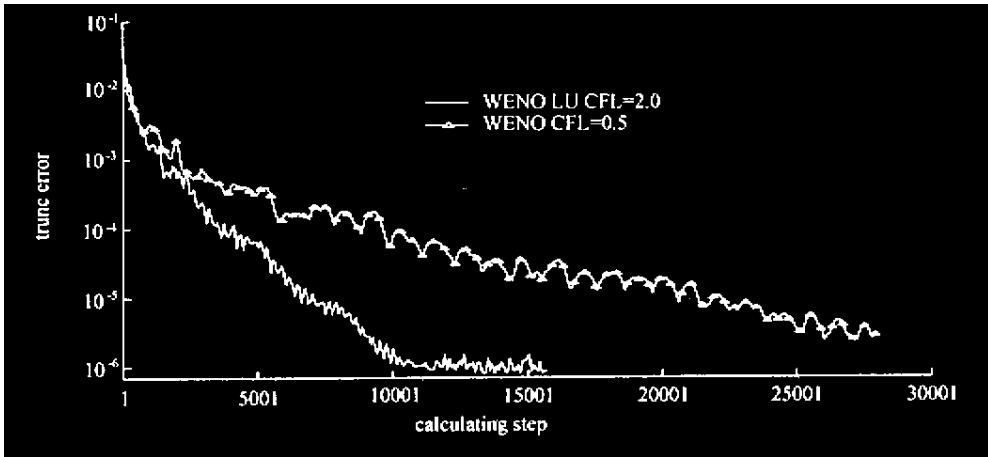


图 10 不同收敛方法收敛史

Fig.10 The converging history of different algorithms

3 结 论

本文结果说明 :对于同样网格 WENO 对流场的分辨能力较 TVD 格式有了一定的提高 ;在采用了近似隐式分裂的 LU 方法后 ,格式能够保持高阶格式良好的分辨能力 ,而收敛时间却大大缩短。在稳态问题的计算中采用 WENO 结合近似隐式分裂的 LU 方法 ,不但能够利用 WENO 格式高阶、高分辨率的优点 ,而且能够加快计算收敛的速度 ,实践表明是一种可行的方法。在计算中应用上述方法需要注意 CFL 数的选取 ,做到即保证有合适的收敛速度 ,又保证计算良好的收敛特性。

参 考 文 献:

- [1] HARTEN A, ENGQUIST B, OSHER S, CHAKRAVARTHY S. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes [J]. *Journal of Computational Physics*. 1987 (71) 231-303
- [2] LIU X D, OSHER S and CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. *JCP*. 1994
- [3] CHI-WANG SHU, STANLEY OSHER. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. *JCP*. 1998
- [4] CHRISTOFI S. The study of building blocks for ENO schemes [D]. thesis. Division of Applied Mathematics, Brown University. September 1995.
- [5] SHARIFF K et. High order methods for computational physics [J]. Springer. 1999
- [6] ERLEBACHER G, HUSSAINI Y and SHU C. W. Interaction of a shock with a longitudinal vortex [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997 (337): 129-153.
- [7] 傅德熏, 马延文. 高精度差分格式及多尺度流场特性的数值模拟 [J]. 空气动力学学报, 1998, 16(3)
- [8] 张涵信等. 网格与高精度差分计算问题 [J]. 力学学报, 1999, 31(4) 398-405.
- [9] JIANG G, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. *JCP*. 1996, 126.
- [10] RALF H, THOMAS H. A comparison of ENO and TVD schemes for computation of shock turbulence interaction [J]. *JCP*. 1995, (121): 176-184.
- [11] CHI-WANG SHU. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws [R]. NASA/CR, 19980007453.
- [12] 陈林泉, 侯晓. 斜切反喷管性能分析 [J]. 固体火箭技术, 1999, 22(3)

Numerical study on the WENO scheme in steady flow problem

HOU Zhong-xi, LIANG Jian-han, WANG Chen-yao

(Institute of Aerospace, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract : High order, high resolution WENO scheme can improved the resolution and accuracy of the complex flow structure. Approximated implicit split lower upper method can speed up the convergence for time - marching problem. By combining WENO scheme and LU method, an efficient algorithm for steady flow calculating is presented. The numerical results show that the algorithm can speed up the convergence, and is distinguished for describing the complex structure of flow.

Key words : WENO scheme; LU; steady flow; complex flow structure