

一种高效的隐式间断 Galerkin 方法研究

郭永恒, 杨永, 张强

(西北工业大学 翼型叶栅空气动力学国防科技重点实验室, 陕西 西安 710072)

摘要:基于线性化处理,在时间方向上对间断 Galerkin 方程进行了隐式离散,从整体上对迭代过程进行了合理的优化,并以此求解了计算流体力学中的二维 Euler 方程。其中,LU-SGS 方法得到了进一步的推广,被用来高效求解隐式格式对应的大型稀疏线性系统。数值实验表明,无论对于亚声速问题还是跨声速问题,该格式都是无条件稳定的;与显式的 Runge-Kutta 间断 Galerkin 格式相比,当残值下降到相同量级时,隐式格式所需的迭代步数和 CPU 时间均在很大程度上得到了减少。

关键词:间断 Galerkin;隐式格式;优化;无条件稳定;CPU 时间

中图分类号: V211.3

文献标识码: A

0 引言

在计算流体力学领域,为了高精度地求解非线性偏微分方程组,研究更加复杂的流动现象,间断 Galerkin 方法已经引起人们越来越多的关注。特别是经过 Cuckburn 和 Shu 的长期探索,一种具有 TVD 性质的显式 Runge-Kutta 间断 Galerkin(RKDG)格式得以逐步完善^[1],被广泛应用于双曲守恒律问题的数值求解,取得了大量令人满意的结果,显示了间断 Galerkin 方法的优越性。然而,美中不足的是,随着逼近精度的提高,RKDG 格式对应的稳定性条件将越来越严格,时间步长受到明显的限制,从而导致更多 CPU 时间的消耗。对于定常流场的计算问题,尽管可以把当地时间步长技术与 RKDG 格式相结合,在一定程度上加速收敛过程,但是即便如此,最大的时间步长依然受到当地稳定性条件的限制^[2]。缓慢的收敛速度在很大程度上制约着 RKDG 方法在工程中的应用。基于以上分析,本文建立了一种隐式间断 Galerkin(Implicit Discontinuous Galerkin, IMDG)求解器,并通过对比翼型亚声速和跨声速流场的模拟,检验了该求解器的计算效率。

1 间断 Galerkin 方程

在二维区域 D 上,Euler 方程可以写成如下守恒形式

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = 0 \quad (1)$$

$\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{F} = (F, G)^T$ 分别代表守恒型流动变量和通量向量。把 D 划分成 Ne 个互不重叠的子区域 D_i ,并且设解函数空间为

$$V_h = \{v \in L^1(D) : v|_{D_i} \in P(D_i), i = 1, \dots, Ne\} \quad (2)$$

$P(D_i)$ 是定义在 D_i 上的多项式空间。设 D_i 上的测试函数集合为 $B_i = \{v_l^i\}_{l=0, \dots, N-1}$,它符合如下条件

$$\text{Span}(B_i) = P(D_i), \text{Supp}(v_l^i) = D_i, \\ l = 0, \dots, N-1 \quad (3)$$

为了控制数值离散产生的小量误差,使用加权残量法^[3],在每个单元上作如下内积运算

$$\int_{D_i} \left[\frac{\partial \mathbf{Q}_h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}_h) \right] v dx = 0, \quad \forall v \in B_i \quad (4)$$

运用 Green 公式,我们由方程(4)得到间断 Galerkin 方程

$$\int_{D_i} \frac{\partial \mathbf{Q}_h}{\partial t} v dx - \int_{D_i} \mathbf{F}(\mathbf{Q}_h) \cdot \nabla v dx \\ + \sum_j \int_{\partial D_{ij}} \mathbf{F}(\mathbf{Q}_h) \cdot \mathbf{n} v ds = 0, \quad \forall v \in B_i \quad (5)$$

∂D_{ij} 和 $\mathbf{n}$ 分别表示当前单元的边界和相关的单位外法向量。在式(5)左边第三项的积分中,我们使用迎风格式对数值通量进行计算,实现相邻单元之间的信息传递^[4]:

* 收稿日期:2010-11-05; 修订日期:2011-03-10

基金项目:国家自然科学基金(11002117)资助

作者简介:郭永恒(1982-),男,河北秦皇岛人,博士研究生,主要从事理论与计算流体力学的研究. E-mail: kllf002@163.com

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_h) \cdot \mathbf{v} |_{\partial D_{ij}} = \mathbf{F}_{mun}(\mathbf{Q}_i^j, \mathbf{Q}_j^i, \mathbf{n}) \quad (6)$$

在基函数的构造过程中,我们应用 Gram-Schmidt 方法对多项式序列

$$1, \xi, \eta, \xi^2, \eta^2, \xi\eta, \dots$$

进行规范正交化,所得的结果即为数值格式中使用的基函数,其具体形式为:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2}, \\ v_2 &= -2 + 6\xi, \\ v_3 &= 2\sqrt{3}(-1 + \xi + 2\eta), \\ v_4 &= \sqrt{6}(1 - 8\xi + 10\xi^2), \\ v_5 &= \sqrt{3}(1 + 4\xi - 5\xi^2 - 12\eta + 15\eta^2), \\ v_6 &= 3\sqrt{5}(1 + 3(\xi^2 + \eta^2) - 4(\xi + \eta) + 8\xi\eta) \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

三角形单元经过坐标变换后,在计算区域 $D = \{(\xi, \eta) | 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, 0 \leq \xi \leq 1\}$ 上,基函数满足如下条件:

$$\iint_D v_i v_j d\xi d\eta = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ 为克罗内克尔符号}) \quad (8)$$

这样,式(5)第一项对应的质量矩阵就成为对角矩阵,使离散格式得到明显简化。当采用前三项时,离散格式为二阶精度,当采用前六项时,离散格式为三阶精度。在本文的数值实验中,显式格式和隐式格式一律设置为二阶精度用来比较收敛速度。

2 隐式时间离散格式

我们在时间方向上运用 Euler 向后差分,并把第 n 和第 $n+1$ 时间层之间物理量 X 的增量记为 δX^n ,即

$$\delta X^n = X^{n+1} - X^n \quad (9)$$

那么,在第 i 号单元上,间断 Galerkin 方程(5)就变形为

$$\begin{aligned} \int_{D_i} \frac{\delta \mathbf{Q}_i^n}{\delta t} v_i^j dx - \int_{D_i} \delta \mathbf{F}(\mathbf{Q}_i^n) \cdot \nabla v_i^j dx \\ + \sum_j \int_{\partial D_{ij}} \delta \mathbf{F}_{mun}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n, \mathbf{n}) v_i^j ds = \mathbf{R}_{i,l}(\mathbf{Q}^n) \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{R}_{i,l}(\mathbf{Q}^n)$ 为残差向量,即

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i,l}(\mathbf{Q}^n) = \int_{D_i} \mathbf{F}(\mathbf{Q}_i^n) \cdot \nabla v_i^j dx - \\ \sum_j \int_{\partial D_{ij}} \mathbf{F}_{mun}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n, \mathbf{n}) v_i^j ds \end{aligned} \quad (11)$$

设整个流场中守恒型变量为

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{N_e})^T \quad (12)$$

$\mathbf{Q}$ 对应的有限元系数向量为

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{\mathbf{Q}}_1, \dots, \hat{\mathbf{Q}}_{N_e})^T \quad (13)$$

$\hat{\mathbf{Q}}$ 的每一个分量为

$$\hat{\mathbf{Q}}_i = (\hat{\mathbf{Q}}_{i,0}, \dots, \hat{\mathbf{Q}}_{i,N-1}) \quad (14)$$

这样, D_i 上的有限元解就可以表示为

$$\mathbf{Q}_i(x, t) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{\mathbf{Q}}_{i,l}(t) v_l^i(x) \quad (15)$$

对式(10)左侧第二、第三项的被积表达式做线性化处理,得

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}(\mathbf{Q}_i^n) \cdot \nabla v_i^j &= \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \nabla v_i^j \right]_{\mathbf{Q}_i^n} \delta \mathbf{Q}_i^n \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \nabla v_i^j \right]_{\mathbf{Q}_i^n} \delta \left(\sum_{k=0}^{N-1} \hat{\mathbf{Q}}_{i,k}^n v_k^i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} v_k^i \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \nabla v_i^j \right]_{\mathbf{Q}_i^n} \delta \mathbf{Q}_{i,k}^n \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}_{mun}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n, \mathbf{n}) v_i^j &= v_i^j \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} + \lambda \beta \mathbf{I} \right]_{\mathbf{Q}_i^n} \delta \mathbf{Q}_i^n + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} - \lambda \beta \mathbf{I} \right]_{\mathbf{Q}_j^n} \delta \mathbf{Q}_j^n \right] \\ &= \frac{1}{2} v_i^j \left[\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} + \lambda \beta \mathbf{I} \right]_{\mathbf{Q}_i^n} \delta \left(\sum_{k=0}^{N-1} \hat{\mathbf{Q}}_{i,k}^n v_k^i \right) + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} - \lambda \beta \mathbf{I} \right]_{\mathbf{Q}_j^n} \delta \left(\sum_{k=0}^{N-1} \hat{\mathbf{Q}}_{j,k}^n v_k^j \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{v_i^j v_k^i}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} + \lambda \beta \mathbf{I} \right]_{\mathbf{Q}_i^n} \delta \hat{\mathbf{Q}}_{i,k}^n + \\ &\quad \sum_{k=0}^{N-1} \frac{v_i^j v_k^j}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} - \lambda \beta \mathbf{I} \right]_{\mathbf{Q}_j^n} \delta \hat{\mathbf{Q}}_{j,k}^n \end{aligned} \quad (17)$$

λ 为 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}$ 的谱半径, $\mathbf{I}$ 为单位矩阵, $\beta \in (0, 1]$ 为松弛因子。在数值实验中,松弛因子适当减小,将在一定程度上提高收敛速度,本文设定 $\beta = 0.8$ 。把式(16)、(17)代入方程(10),依 Gauss 公式进行数值积分,就得到了一个大型稀疏的线性系统,它的一般形式为

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q}^n) \delta \hat{\mathbf{Q}}^n = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n) \quad (18)$$

$\mathbf{A}$ 为系数矩阵, $\mathbf{R}$ 为残差向量

$$\mathbf{R}(\mathbf{Q}) = (\mathbf{R}_1(\mathbf{Q}), \dots, \mathbf{R}_{N_e}(\mathbf{Q}))^T \quad (19)$$

$\mathbf{R}$ 的分量记为

$$\mathbf{R}_i(\mathbf{Q}) = (\mathbf{R}_{i,0}(\mathbf{Q}), \dots, \mathbf{R}_{i,N-1}(\mathbf{Q})) \quad (20)$$

对比式(10)和式(18)可以发现,对于定常问题,IM-DG 格式退化 Newton 迭代法,它具有二次收敛阶^[5]。因为在每一个时间步上,建立系数矩阵 $\mathbf{A}$ 需要进行大量的数值积分,所以受文献[5]的启发,我们对式(18)进行一个重要修正,得

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q}^{(n)}) \delta \hat{\mathbf{Q}}^n = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n) \quad (21)$$

其中,

$$s(n) = \begin{cases} n & \text{if } \text{mod}(n-1, k) = 0 \\ n-1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

“ $\text{mod}(n-1, k)=0$ ”表示 $n-1$ 被 $k(k \geq 2)$ 整除, 这样, 每进行 k 次迭代, 残值向量 $\mathbf{R}$ 更新 k 次, 而系数矩阵 $\mathbf{A}$ 只更新一次, 与式(18)相比, 计算量大大降低, 迭代过程也从整体上得到了进一步的优化。

3 线性系统的求解

通过类比, 我们把有限体积法中的 LU-SGS 方法^[6]进行推广, 用来求解大型稀疏线性系统(22)。首先, 把矩阵 $\mathbf{A}$ 进行如下分解

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} \quad (23)$$

$\mathbf{L}$ 、 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{U}$ 分别为严格的分块下三角矩阵、分块对角矩阵和分块上三角矩阵。令矩阵

$$\mathbf{P}_i = (\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{U}) \quad (24)$$

然后, 用 $\mathbf{P}$ 近似代替 $\mathbf{A}$, 并略去 $\hat{\mathbf{Q}}^n$ 的时间层上标 n , 得

$$\mathbf{P}\delta\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{R} \quad (25)$$

我们可以根据如下两个步骤对线性系统(25)进行快速求解

$$\text{I 向前扫描: } (\mathbf{D} + \mathbf{L})\delta\hat{\mathbf{Q}}^* = \mathbf{R} \quad (26)$$

即

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathbf{Q}}_i^* &= \mathbf{D}_i^{-1}(\mathbf{R}_i - \mathbf{L}\delta\hat{\mathbf{Q}}_j), \\ i &= 1, \dots, N_e, i > j \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{II 向后扫描 } (\mathbf{D} + \mathbf{U})\delta\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{D}\delta\hat{\mathbf{Q}}^* \quad (28)$$

即

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathbf{Q}}_i &= \delta\hat{\mathbf{Q}}_i^* - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{U}\delta\hat{\mathbf{Q}}_j), \\ i &= N_e, \dots, 1, i < j \end{aligned} \quad (29)$$

4 计算结果分析

为了测试 IMDG 方法的计算效率, 我们分别求解了 NACA0012 翼型对应的亚声速和跨声速流场, 并与 RKDG 格式得到的结果作比较。首先, 在 NACA0012 翼型周围生成非结构网格, 如图 1、图 2 所示。

对于亚声速情形, 设定计算状态为: $Ma_\infty = 0.63$, $\alpha = 2^\circ$ 。在 IMDG 格式中, 逐步加大 CFL 数, 可以发现该格式是无条件稳定的, 这说明本文的隐式格式具有优良的稳定性。图 3 是压强系数分布曲线, 可以看出, RKDG 和 IMDG 对应的结果几乎完全一致, 这说明二者的计算精度是相同的。图 4 是残值随迭代步数的变化曲线, 图 5 是残值随 CPU 时间的变化曲线, 可以看出 IMDG 对应的残值不仅在大范围内单调下降, 而且当下降到相同量级时, IMDG 使用的迭代步数和 CPU 时间分别比 RKDG 节省了 90% 和 85% 以上, 收敛速度几乎提高了一个数量级。

为了进一步检测 IMDG 求解器的计算效率, 我们求解了 NACA0012 翼型的跨声速流场, 设定计算状态为: $Ma_\infty = 0.8$, $\alpha = 1.25^\circ$ 。在此算例中, 本文没有附加任何限制器, 依然能够得到收敛的结果, 如图 6~图 8 所示。

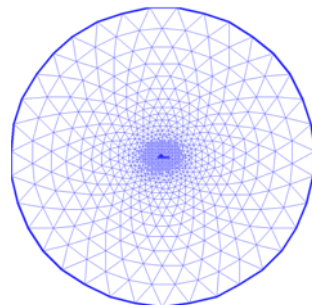


图 1 NACA0012 翼型计算网格(整体)

Fig. 1 Grid for the computational domain of NACA0012 (entire)

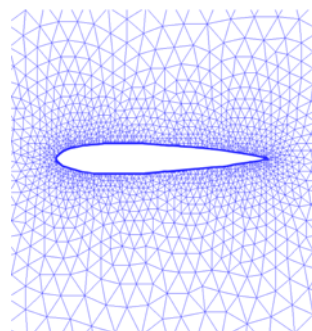


图 2 NACA0012 翼型计算网格(局部)

Fig. 2 Grid of the computational domain of NACA0012 (partial)

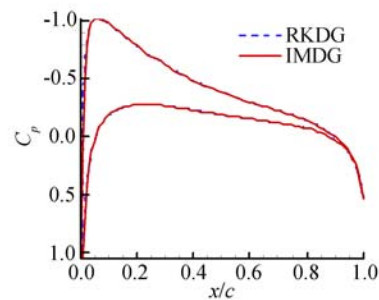


图 3 压强系数分布曲线(亚声速)

Fig. 3 Distribution of pressure coefficient (subsonic)

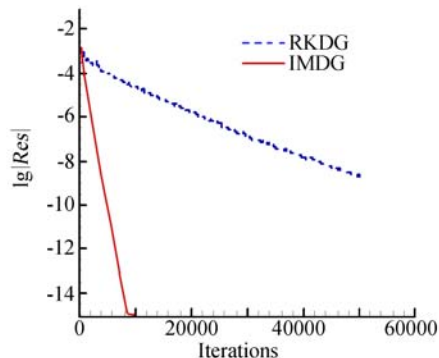


图 4 残值随迭代步数变化曲线(亚声速)

Fig. 4 The residual vs. number of iterations (subsonic)

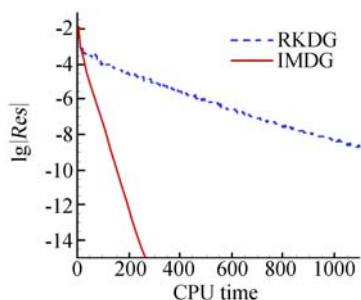


图5 残值随 CPU 时间变化曲线(亚声速)

Fig. 5 The residual vs. CPU time (subsonic)

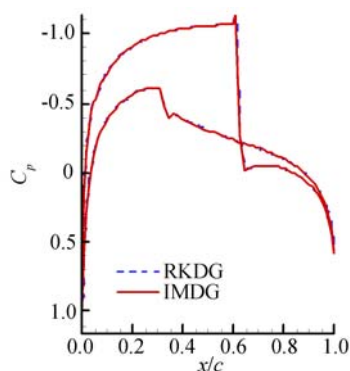


图6 压强系数分布曲线(跨声速)

Fig. 6 Distributions of pressure coefficient (transonic)

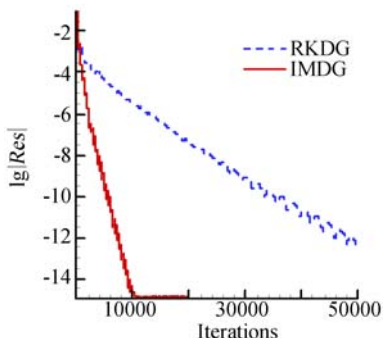


图7 残值随迭代步数变化曲线(跨声速)

Fig. 7 The residual vs. number of iterations (transonic)

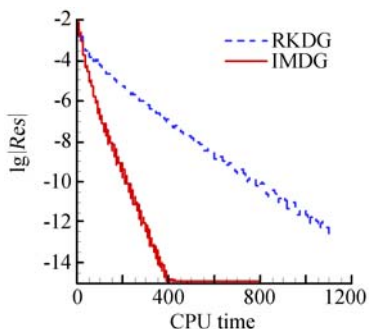


图8 残值随 CPU 时间变化曲线(跨声速)

Fig. 8 The residual vs. CPU time (transonic)

可以看出,IMDG 能够捕捉到位置和 RKDG 完全一致的激波;同时,在高效计算方面,它再一次展示了自身的优越性。

5 结 论

为了提高间断 Galerkin 方法求解定常流场问题的效率,本文建立了与之相关的隐式离散格式,并在一定程度上对迭代过程进行了优化。数值实验表明该格式是无条件稳定的,这非常有利于计算效率的大幅提高。今后,可以在本文基础上展开更深层的探索,特别是简化隐式格式的建立过程,提高相关的大型稀疏线性系统的求解精度,从而使 IMDG 的计算效率进一步增强,为间断 Galerkin 方法在工程计算中的广泛应用打下坚实的基础。

参 考 文 献:

- [1] COCKBURN B, SHU C W. TVD Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws II: General Framework [J]. *Math. Comp.*, 1989, (52):411-435.
- [2] PATRICK RASSETARINERA, HUSSAINI M Y. An efficient implicit discontinuous spectral Galerkin method [J]. *Journal of Computational Physics*, 2001(172): 718-738.
- [3] 王烈衡, 许学军. 有限元方法的数学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
(WANG L H, XU X J. The mathematical foundations of the finite element method [M]. Beijing: Science Press, 2004.)
- [4] ROE P L. Approximate Riemann solver, parameter vectors and different schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 43: 357-372.
- [5] 奥特加 J M, 莱因博尔特 W C. 多元非线性方程组迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1983.
(ORTEGA J M, RHEINOLDT W C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables[M]. Beijing: Science Press, 1983.)
- [6] JAMESON A, TURKEL E. Implicit scheme and LU-decompositions [J]. *Math. Comput.*, 1981, 37: 385-397.

(下转第 265 页)