

文章编号: 0258-1825(2013)04-0413-08

弹性飞行器飞行动力学建模研究

郭东, 徐敏, 陈士橹

(西北工业大学航天学院, 陕西 西安 710072)

摘要:随着飞行器结构模态频率与刚性模态频率愈加接近,弹性效应对弹性飞行器飞行动力学特性的影响变得愈加明显,特别是操稳特性将变得更加的复杂和严峻,已经不能用“刚性飞行器”的分析方法进行研究,因此迫切需要为弹性飞行器建立能够包含多学科耦合的飞行动力学模型。本文对弹性飞行器飞行动力学建模的相关研究进行了总结与发展:首先简要阐述了建立多学科耦合弹性飞行器飞行动力学模型的必要性;然后对传统的弹性飞行器飞行动力学模型进行了研究,分析总结了这些方法的优缺点;最后在此基础上提出了一种新的体轴系(瞬态坐标系),并利用拉格朗日方程和有限元思想推导了该坐标系下的动力学模型,该模型克服了传统模型的缺点,并准确地耦合了结构动力学、飞行动力学、空气动力学与控制等学科,较现有的模型而言,该模型能更充分更全面的描述弹性飞行器飞行过程中流场、结构、控制和飞行力学之间的交叉耦合特性。本文的研究成果可为弹性飞行器的动态特性分析提供必要的理论基础。

关键词:弹性飞行器;动力学建模;多学科耦合;飞行动力学

中图分类号: V212

文献标识码: A

0 引言

数学模型是计算飞行力学(Computational Flight Mechanics)的基础,而建立飞行器的“飞行动力学模型”则是飞行器系统所有建模问题的核心,是飞行力学工作者的首要任务^[1-2]。

传统的弹性飞行器动态特性分析是在两门独立的学科下进行的:飞行力学和气动弹性力学。飞行力学主要是将飞行器视为准刚性体,在一定的假设条件下,运动方程可以由12个或者更少的常微分方程来描述。通常采用将这些方程在平衡条件下进行线性化,通过线性化后的方程得到其指数解,从而可以利用特征根问题来分析飞行器的飞行稳定性。另一方面,气动弹性力学研究的对象是刚性运动受限的弹性飞行器,是空气动力学、结构动力学耦合产生的交叉学科。气动弹性力学研究的侧重点是:弹性结构在非定常气动力作用下的应力、应变和位移变化规律,例如操纵面反效、扭转发散、抖振及颤振等气动弹性问题,这类气动弹性问题严重影响飞行器飞行品质和飞行包线^[3-5]。

然而大量的研究表明:机翼的结构变形会改变机翼的质量分布和气动载荷分布,这将导致机翼甚至整个飞行器的气动弹性和飞行动力学特性发生变化,而这些效应只有通过非线性和多学科综合分析才能得到,因此基于线性分析方法得到的结果并不一定可靠,即在气动弹性研究中忽略全机的刚体运动,所得到的结果是非常不准确的^[6-15]。

例如,2003年6月26日,NASA的“太阳神”无人机HP03-2正是因为弹性效应而遭遇了巨大的灾难(图1~图4)。NASA调查后指出,这次事故的根本原因在于缺乏对大柔性可变形飞行器进行先进的多学科时域分析的方法。这次灾难表明我们对弹性飞行器的设计还了解太少,也缺乏相应的分析工具,并提出发展一套将结构动力学、空气动力学和现代控制理论等学科统一起来的耦合模型,以通过时域仿真来描述飞行器的非线性动力学特性^[16-17]。

因此,将飞行力学、空气动力学、结构动力学、气动弹性力学和现代控制理论统一起来研究弹性飞行器的非线性动态特性是非常必要的,这对飞行器动稳定性的分析、颤振边界的预测、飞行包线的确定以及

* 收稿日期:2012-01-28; 修订日期:2012-04-05

基金项目:国家自然科学基金重大研究计划(90816008);教育部博士点基金(20070699054)

作者简介:郭东(1986-),男,博士生,主要研究方向:弹性飞行器飞行动力学建模与仿真。E-mail: guodong@mail.nwpu.edu.cn



图1 HP03-2 起飞
Fig. 1 HP03-2 on take off



图2 HP03-2 爬升
Fig. 2 HP03-2 during climb



图3 HP03-2 严重变形
Fig. 3 HP03-2 at high wing dihedral



图4 HP03-2 坠毁于大海
Fig. 4 Falling to the Pacific

控制系统的设计具有重要指导意义。然而,研究弹性飞行器在空间的运动,计算或模拟其运动轨迹及分析其动态特性,首先需要建立其数学模型。该模型不仅要能够描述飞行器在体轴系中的大幅机动,而且还必

须能同时描述结构的小变形运动,这就要求模型中能够同时给出飞行器的刚性自由度和弹性自由度,并能充分的反映出它们之间的耦合效应。

1 传统的弹性飞行器飞行动力学模型

建立作用力与物体运动状态变化之间的关系,通常采用牛顿力学或者分析力学理论。而分析力学中的虚位移原理和达朗贝尔原理,特别是由此推出的拉格朗日方程,可以消去所有理想约束的约束反力,还给出了任意多个自由度系统的全部微分方程,因此特别适合于求解非自由质点系的动力学问题,目前绝大多数的弹性飞行器飞行动力学模型都是基于该理论推导得到的^[18-22]。

相对于刚性运动而言,飞行器的弹性变形是小量,通常选择在体轴系中描述这些量。而体轴系的选取方法将直接影响所建立数学模型的繁简程度和对所研究对象描述的准确程度。目前,常用的体轴系主要有平均轴系和准坐标系。

1.1 平均轴系(Mean Axes)

平均轴系又称为蒂塞朗坐标系(Tisserand Frame),它需要满足飞行器相对于体轴系的线动量和角动量始终为0,从而使总角动量和总动能得以简化^[23-26]。前者可以通过定义坐标系的原点始终位于飞行器的质心来满足,而要使系统的内部角动量为0,则需要满足:

$$\int_D \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} dm = 0 \quad (1)$$

式中, $\boldsymbol{\rho}$ 是集中质量单元相对于质心的位移; $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ 是 $\boldsymbol{\rho}$ 在体轴系中相对于时间的导数; dm 是集中质量单元的质量。

由于弹性变形是随时间变化的,则该坐标系相对于未变形飞行器总是运动的。当不考虑弹性变形对飞行器惯性张量的影响时,刚性运动与弹性运动之间是解耦的。*Buttrill*^[26]和*Waszak*^[21]各自在平均轴系假设下利用拉格朗日方程推导了弹性飞行器飞行动力学模型,分别如表1和表2所示。

从这些表中可以看出平均轴系的使用确实降低了刚性与弹性自由度之间的惯性耦合。*Waszak*模型与传统的刚体动力学模型在形式上是相似的,且弹性自由度和刚性自由度之间不存在任何的耦合(所有的耦合都是通过气动载荷来实现的)。*Buttrill*模型在形式上更复杂,相对于*Waszak*模型而言,平动方程是相同的,而转动方程和弹性运动方程中都存在额外

表 1 Buttrill 建立的弹性飞行器飞行动力学模型

Table 1 Buttrill's elastic aircraft equations of motion

$$\begin{aligned}
 m\dot{V} &= F - m(\omega \times V) + mg \\
 [J]\dot{\omega} + h_{jk}\eta_j\ddot{\eta}_k &= L - \omega \times [J]\omega - [\dot{J}]\omega - h_{jk}\dot{\eta}_j\dot{\eta}_k - \omega \times h_{jk}\eta_j\dot{\eta}_k \\
 M_{jk}\ddot{\eta}_k - \dot{\omega} \cdot h_{jk}\eta_k &= Q_{\eta_j} - M_{jj}\omega_j^2\eta_j + 2\omega \cdot h_{jk}\dot{\eta}_k + \\
 &\quad \frac{1}{2}\omega^T \{ [\Delta J]_j + [\Delta^2 J]_{jk}\eta_j \} \omega \\
 [J] &= [J_0] + [\Delta J]_j\eta_j + \frac{1}{2}[\Delta^2 J]_{jk}\eta_j\eta_k
 \end{aligned}$$

表 2 Waszak 建立的弹性飞行器飞行动力学模型

Table 2 Waszak's elastic aircraft equations of motion

$$\begin{cases}
 m(\ddot{u} - r\dot{v} + q\dot{w} + g\sin\theta) = Q_x \\
 m(\dot{v} - p\dot{w} + r\dot{u} - g\sin\theta\cos\theta) = Q_y \\
 m(\dot{w} - q\dot{u} + p\dot{v} - g\cos\theta\cos\theta) = Q_z \\
 I_{xx}\dot{p} - (I_{xy}\dot{q} + I_{xz}\dot{r}) + (I_{xx} - I_{yy})qr \\
 \quad + (I_{xy}r - I_{xz}q)p + (r^2 - q^2)I_{yz} = Q_p \\
 I_{yy}\dot{q} - (I_{xy}\dot{p} + I_{yz}\dot{r}) + (I_{xx} - I_{zz})pr \\
 \quad + (I_{yz}p - I_{xy}r)q + (p^2 - r^2)I_{xz} = Q_q \\
 I_{zz}\dot{r} - (I_{xz}\dot{p} + I_{yz}\dot{q}) + (I_{yy} - I_{zz})qp \\
 \quad + (I_{xz}q - I_{yz}p)r + (q^2 - p^2)I_{xy} = Q_r \\
 M_j[\ddot{\eta}_j + 2\zeta_j\omega_j\dot{\eta}_j + \omega_j^2\eta_j] = Q_{\eta_j}, j = 1, 2, 3, \dots
 \end{cases}$$

的项。在转动方程中,这些附加项是由于飞行器结构发生变形使得质量分布发生了变化,从而改变了飞行器的惯性张量。另外,还包含了结构变形的位移量与速度量之间叉积不为 0 所引起的项。弹性变形运动方程中的附加项与体轴系的角加速度、科里奥利加速度和离心载荷有关^[27]。当假设弹性变形位移及其速率都是小量或者它们的关系是线性的,从而它们之间的叉积可以忽略并且认为惯性张量是常量,则可以消除上面提到的这些附加项,此时 Buttrill 模型简化为 Waszak 模型。由于 Waszak 模型相对简单,所以得到了大多数研究者的青睐^[28-33]。

1.2 准坐标系 (Quasi-Coordinates)

准坐标系是一种当地固连坐标系,它的坐标原点始终位于未变形飞行器的质心,通过它可以方便的得到坐标系原点的平动和绕坐标轴的转动,分别将其视为飞行器的刚性平动和转动,并将相对于坐标系的任何运动都视为是弹性变形。

针对具有弹性附件的航天器,Meirovitch 和 Nelson 首次推导了耦合刚性旋转和弹性变形的混合微分方程^[34]。弹性变形是相对于一系列固定在未变形航天器上的体轴系中给出,旋转运动是在准坐标系中给出。准坐标系的原点始终与未变形飞行器的质心重合,且各轴的指向始终不变,它是一种固定在未变

形飞行器上的坐标系。在文献[35]中 Meirovitch 将上述方法拓展到了完全弹性的物体上,如表 3 所示。

表 3 Meirovitch 在准坐标系下建立的弹性飞行器飞行动力学模型

Table 3 Meirovitch's elastic aircraft equations of motion

$$\begin{aligned}
 m\dot{V} + \tilde{S}^T\dot{\omega} + \int_D \rho \dot{v} dD &= (2\tilde{S}_v + m\tilde{V} + \tilde{\omega}\tilde{S})\omega - C\frac{\partial V}{\partial R} + F \\
 \tilde{S}\dot{V} + J\dot{\omega} + \int_D \rho(\tilde{r} + \tilde{u})\dot{v} dD &= \left[2\int_D \rho(\tilde{r} + \tilde{u})v dD + \tilde{S}\tilde{V} - \tilde{\omega}J \right] \omega \\
 &\quad - (D^T)^{-1}\frac{\partial V}{\partial \theta} + M \\
 \rho\dot{v} + \rho(\tilde{r} + \tilde{u})^T\dot{\omega} + \rho\dot{v} &= -\rho\tilde{V}^T\omega - \rho\tilde{\omega}^2(r + u) - 2\rho\tilde{\omega}^T\omega - Lu + \hat{U}
 \end{aligned}$$

Meirovitch 还根据分支模态法,分别对飞行器的不同部分(机身、机翼、尾翼等)进行有限元分析,建立了弹性飞行器的运动方程组,并采用小扰动法将所得的运动方程组进行了线性化,从而得到了一套专门用于分析弹性飞行器动态特性的理论^[36-37]。

1.3 传统模型的比较与分析

虽然使用平均轴系确实能让运动方程得到大大的简化,然而要得到这样的简化需要付出很大的代价,因为定义坐标轴的限制条件很难满足,从而不能确定出变形后惯性张量的大小。因此,很多研究者在使用平均轴系时,并没有试图去满足这些限制条件,只是假定弹性变形为小量,惯性张量不随时间变化,然而在真实情况却不是这样的。另外,对弹性飞行器而言,即使这些限制条件得到了满足,运动方程之间也并不是完全解耦的,因为运动方程之间还通过气动载荷存在耦合。如果要坚持使用平均轴系,气动载荷也必须在相同的平均轴系下给出,这同样是一个相当繁琐的工作。既不满足限制条件也没有将气动载荷转换到平均轴系中,是现在研究弹性飞行器使用平均轴系通常的做法,由此得到的结果是很值得怀疑的^[38]。

与平均轴系不同的是,准坐标系原点和指向在惯性空间中是始终确定的,不随飞行器的结构变形而变化,能够较好的描述刚性自由度与弹性自由度之间的交叉耦合。然而,也正是由于该坐标系的坐标系原点和指向始终不随飞行器质心的变化而变化,这使得该坐标系下的刚性自由度是坐标原点的平动速度和绕坐标原点的转动速度,并不是弹性飞行器真实的质心平动速度和绕质心转动的速度,我们称之为“准速度”和“准角速度”。另外,由于质心的变化,实际的重力也会由于质心不与坐标原点重合而产生力矩,这在实际使用中并没有考虑。

通过上面的分析可以看出,这两种方法都不能完整的从本质上描述弹性飞行器飞行过程中刚性自由

度与弹性自由度之间的耦合效应,下面就这两种坐标系,用表格的形式直观的列出其优缺点,如表4所示。

表4 两种不同坐标系下模型的优缺点比较

Table 4 Comparisons between the equations in terms of different body reference frames

坐标系	优点	缺点
平均轴系	1. 刚性自由度、弹性自由度之间的耦合关系少; 2. 方程简单,计算方便;	1. 坐标轴的具体指向和各个质点在平均轴系中的瞬时坐标难以明确; 2. 未考虑质量分布发生变化对惯性张量的影响; 3. 气动载荷和运动自由度在两个不同的坐标系中给出,并没有做任何的坐标转换; 4. 不能从本质上反映结构弹性对飞行器刚性自由度的影响;
准坐标系	1. 坐标轴原点和指向始终确定; 2. 较充分的考虑了刚性自由度与弹性自由度之间的交叉耦合特性;	1. 坐标原点与飞行器质心不总是重合,所得到的刚性平动速度和角速度是“准速度”和“准角速度”,不是飞行器质心真实的平动速度和绕质心转动的速度; 2. 未考虑气动力、推力以及重力由于实际质心偏离坐标原点所造成的附加力矩;

2 一种新的弹性飞行器飞行动力学模型

上一节分析了平均轴系和准坐标系的优缺点,本文结合该两种坐标系的优点,提出一个新的体轴系 $o_b x_b y_b z_b$,在此称之为瞬态坐标系。为了与我国通常使用的坐标系一致,该坐标系的定义如下:坐标原点 o_b 始终位于弹性飞行器的质心上,坐标轴指向始终固定, $o_b x_b$ 轴与飞行器的纵轴重合,指向头部为正; $o_b y_b$ 在飞行器纵向对称平面内,垂直于 $o_b x_b$ 轴,向上为正; $o_b z_b$ 轴垂直于 $x_b o_b y_b$ 平面,方向按右手定则确定。与准坐标系相比,该坐标系的坐标轴指向也是始终固定的,不同的是坐标原点的定义与平均轴系相同,始终和飞行器的质心重合,这使得该坐标系同时具备了上述两种坐标系的优点,不仅可以充分的考虑结构弹性变形对质心位置的影响,还能较容易的在同一个坐标系下描述出不同的物理量,也克服准坐标系下的“准速度”问题,从而可以更充分的考虑刚性自由度与弹性自由度之间的耦合特性,更好的体现空气动力学、结构动力学与弹性飞行器飞行动力学之间的相互影响,为弹性飞行器设计、理论分析、数值计算和数值仿真或半物理仿真等研究提供必要的理论基础。

2.1 采用的假设

(1) 采用平面地球假设,不考虑地球的曲率和自转,以及重力加速度的变化。

(2) 利用有限元思想,将飞行器用一系列质量不变的集中质点来描述;

(3) 结构变形可由一系列正交模态叠加来描述;

2.2 坐标系的定义

为了与我国通常使用的坐标系一致,定义如下坐标系(如图5所示):

(1) 地面坐标系 $OXYZ$ 。该坐标系与地球固联,原点 O 通常取飞行器质心在地面(水平面)上的投影

点, OX 轴在水平面内,指向目标(或目标在地面上的投影)为正, OY 轴与地面垂直,向上为正, OZ 轴按右手定则确定,并假定该坐标系为惯性坐标系。

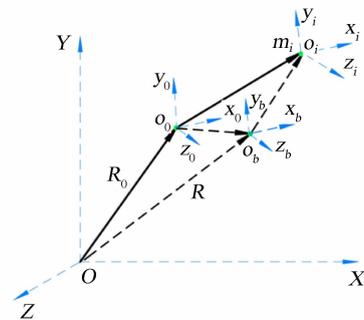


图5 坐标系示意图

Fig. 5 Coordinates definition

(2) 准坐标系 $o_0 x_0 y_0 z_0$ 。原点 o_0 取在飞行器未变形时的质心上, $o_0 x_0$ 轴与飞行器未变形时纵轴重合,指向头部为正, $o_0 y_0$ 轴在飞行器未变形时的纵向对称平面内,垂直于 $o_0 x_0$ 轴, $o_0 z_0$ 轴垂直于 $x_0 o_0 y_0$ 平面,方向按右手定则确定。

(3) 当地坐标系 $o_i x_i y_i z_i$ 。原点位于飞行器的集中质点 $m_i (i=1, 2, \dots, N)$ 上,坐标轴指向分别与准坐标系的相对应。

2.3 拉格朗日方程

拉格朗日方程是由达朗伯原理和虚位移原理相结合,在广义坐标系中给出的动力学普遍方程,在动坐标系中可以表示为^[35]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right) - \mathbf{T}_{cb} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{F} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) + \mathbf{V} \times \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) - (\mathbf{T}_d^T)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{M} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_j} \right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\eta}_j} \right) = Q_j \quad (4)$$

式中各个变量的定义与文献[35]中相同。

2.4 模型的建立

假设每个集中质点都位于结构的有限元节点处,通常,每个节点都有六个自由度(三个平动自由度和三个转动自由度)。假定集中质点 m_i 在准坐标系 $o_0x_0y_0z_0$ 的位置矢量为 \mathbf{r}_{i0} , 弹性变形在当地坐标系 $o_ix_iz_i$ 中的平动自由度为 \mathbf{d}_i , 转动自由度为 $\boldsymbol{\theta}_i$, 为了简化推导过程, 本文只考虑了弹性变形的平动自由度, $\Delta\mathbf{C}$ 是飞行器质心 o_b 在准坐标系 $o_0x_0y_0z_0$ 的变化量:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{C} &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_{i0} + \mathbf{d}_i)}{\sum_{i=1}^N m_i} - \frac{\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{r}_{i0})}{\sum_{i=1}^N m_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{d}_i)}{m}\end{aligned}\quad (5)$$

定义 \mathbf{r}_i 是 m_i 在瞬态坐标系 $o_bx_bz_b$ 中的位置矢量 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i0} - \Delta\mathbf{C}$ (如图6所示), 从而 m_i 在地面坐标系中的位置矢量可表示为:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i \quad (6)$$

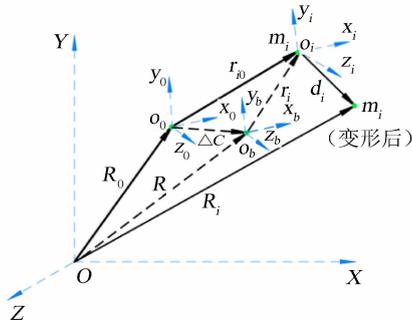


图6 变形前后集中质点在惯性空间的位置
Fig.6 Position of the mass element

m_i 在地面坐标系中的速度矢量为:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_i &= \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i) + \dot{\mathbf{d}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i) + \dot{\mathbf{d}}_i - \dot{\Delta\mathbf{C}}\end{aligned}\quad (7)$$

则飞行器的动能为:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_i) \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i)] + \\ &\quad \mathbf{V} \cdot \sum_{i=1}^N (m_i \dot{\mathbf{d}}_i) - m \mathbf{V} \cdot \dot{\Delta\mathbf{C}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T [J] \boldsymbol{\omega} + \\ &\quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{d}}_i \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i)] - \\ &\quad \dot{\Delta\mathbf{C}} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i)] +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{d}}_i \cdot \dot{\mathbf{d}}_i) - \dot{\Delta\mathbf{C}} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{d}}_i + \\ &\frac{1}{2} m \dot{\Delta\mathbf{C}} \cdot \dot{\Delta\mathbf{C}}\end{aligned}\quad (8)$$

式中 $[J] = \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i) \cdot (\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i) [I] - (\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i)(\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i)^T]$ 为飞行器的瞬时转动惯量。

弹性变形的位移等于振型与广义位移的乘积, 即:

$$\mathbf{d}_i = \sum_{j=1}^n (\boldsymbol{\Phi}_{ij} \eta_j)$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}_{ij}$ 是集中质点 m_i 的第 j 阶振型。弹性变形的速度为: $\dot{\mathbf{d}}_i = \sum_{j=1}^n (\boldsymbol{\Phi}_{ij} \dot{\eta}_j)$ 。

将弹性变形的位移和速度表达式代入式(8)可将总动能改写为:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T [J] \boldsymbol{\omega} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_{jj} \dot{\eta}_j^2 - \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_k) \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k + \\ &\quad \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{j=1}^n (t_j \dot{\eta}_j) + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\mathbf{h}_{jk} \eta_j \dot{\eta}_k)\end{aligned}\quad (9)$$

式中: $t_j = \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\Phi}_{ij})$, $\mathbf{h}_{jk} = \sum_{i=1}^N (m_i \boldsymbol{\Phi}_{ij} \times \boldsymbol{\Phi}_{ik})$, $M_{jk} = \sum_{i=1}^N (m_i \boldsymbol{\Phi}_{ij} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{ik})$, $\mathbf{S}_j = \sum_{i=1}^N (m_i \boldsymbol{\Phi}_{ij})$ 。

势能 E 主要考虑重力势能和弹性势能, 可以表示为:

$$\begin{aligned}E &= E_g + E_{\text{el}} \\ &= - \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (M_{jj} \omega_j^2 \eta_j^2) \\ &= - m \mathbf{g}_e \cdot \mathbf{R} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (M_{jj} \omega_j^2 \eta_j^2)\end{aligned}\quad (10)$$

式中, \mathbf{g}_e 是在地面坐标系中的重力加速度矢量, ω_j 是第 j 阶振型对应的无阻尼固有频率。

雷诺耗散函数可以表示为:

$$D = \sum_{j=1}^n (\mu_j \omega_j M_{jj} \dot{\eta}_j^2) \quad (11)$$

式中 μ_j 第 j 阶模态的临界阻尼系数。

将式(9)、(10)、(11)代入式(2)、(3)、(4), 可以分别得到飞行器质心平动运动的动力学方程、质心转动动力学方程和结构变形的动力学方程, 如表5所示。

从表5中可以发现, 该模型中飞行器的平动动力学方程与刚性飞行器平动动力学方程在形式上是相同的, 与弹性变形自由度是解耦的。绕质心转动的转动自由度与弹性平动自由度存在较复杂的耦合, 在引入平均轴定义的情况下, 该模型可以变为平均轴系下

的飞行动力学模型。由于瞬态坐标系的原点位于飞行器的瞬时质心上,而且坐标轴的指向是固定的,这综合了平均轴系和准坐标系的优点,所以在瞬态坐标系中得到的飞行动力学模型也包含了平均轴系下模型自由度之间的耦合少、方程简单和准坐标系下模型能较充分的体现结构动力学与飞行动力学之间耦合

特性的特点,该模型比平均轴系下得到的模型复杂,但是比准坐标系下得到的模型简单。另外,包括气动载荷在内的所有外力都可以在同一个坐标系中给出,而且本文推导得到的模型还克服了准坐标系的“准速度”和“准角速度”不足,也解决了准坐标系中由于质心偏离坐标原点而可能带来的问题。

表5 瞬态坐标系下弹性飞行器飞行动力学模型

Table 5 Elastic aircraft equations of motion in terms of instant-coordinates

质心平动运动的 动力学方程	$m(\dot{\mathbf{V}} + \dot{\omega}\mathbf{V} - T_{cb}\mathbf{g}_e) = \mathbf{F}$
绕质心转动 动力学方程	$[\mathbf{J}]\dot{\omega} + [\mathbf{J}]\dot{\omega} + \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{i}_j \dot{\eta}_j \rangle + \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{t}_j \ddot{\eta}_j \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{h}_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{h}_{jk} \eta_j \ddot{\eta}_k \rangle + \dot{\omega}[[\mathbf{J}]\omega + \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{t}_j \dot{\eta}_j \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{h}_{jk} \eta_j \dot{\eta}_k \rangle] = \mathbf{M}$
结构变形的 动力学方程	$\mathbf{M}_{jj} \ddot{\eta}_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_k \ddot{\eta}_k \rangle + \omega \cdot \dot{\mathbf{i}}_j + \dot{\omega} \cdot (\mathbf{t}_j - \sum_{k=1}^n \mathbf{h}_{jk} \eta_k) - \frac{1}{2} \omega^T [\mathbf{J}]\omega - 2\omega \cdot \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{h}_{jk} \dot{\eta}_k \rangle + \mathbf{M}_{jj} \omega_j^2 \eta_j + 2\mu_j \omega_j \mathbf{M}_{x_{jj}} \dot{\eta}_j = \mathbf{Q}_j$

3 总结与展望

本文首先阐述了建立弹性飞行器飞行动力学模型的必要性,进而简要介绍了动力学建模理论和体轴系的选择,然后对传统的弹性飞行器飞行动力学模型进行了研究,分析总结了这些方法的优缺点,并在此基础上提出了一种新的体轴系(瞬态坐标系),然后利用拉格朗日方程结合有限元思想,推导了该坐标系下的弹性飞行器飞行动力学模型,该模型具有如下特点:

(1) 同时兼有平均轴系模型简单、耦合关系少的优点和准坐标系模型能够较好的体现各自由度之间的耦合特性且各项外力都可以方便的在同一个坐标系中给出的优点,还克服了平均轴系方法中限制条件难以满足和准坐标系方法的“准速度”和“准角速度”等不足。

(2) 自然地综合了飞行动力学、空气动力学以及结构动力学等学科,充分考虑了刚性自由度与弹性自由度之间的交叉耦合特性,能够更好的体现空气动力学、结构动力学与弹性飞行器飞行动力学之间的相互影响,可以为弹性飞行器设计、理论分析、数值计算和数值仿真或半物理仿真等研究提供必要的理论基础。

(3) 在引入平均轴假设下,该模型可以转变为平均轴系下推导得到的动力学模型。如果忽略由于弹性变形引起的质心变化,该模型可以简化为准坐标系下得到的动力学模型。

当然,不能笼统的说,数学模型越精确越好,一切

取决于研究的目的和所处的阶段。另外,数学模型建立以后,其正确与否还不能马上做出结论,还需要进行模型的校验、验证和确认(VV&A)。

参 考 文 献:

- [1] 关世义. 关于飞行力学的再思考[J]. 战术导弹技术, 2003, (2): 1-12.
- [2] 关世义. 计算飞行力学的产生和发展[J]. 航空学报, 2001, 22(1): 1-5.
- [3] LEONARD MEIROVITCH, ILHAN TUZCU. Control of flexible aircraft executing time-dependent maneuvers [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, 28(6): 1291-1300.
- [4] ILHAN TUZCU. On the stability of flexible aircraft[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2008, (12): 376-384.
- [5] 杨超. 飞行器气动弹性原理[M]. 北京航空航天大学出版社, 北京, 2011.
- [6] BARIS FIDAN, MAJ MIRMIRANI, PETROS A TOANNOU. Flight dynamics and control of airbreathing hypersonic vehicles: review and new directions[R]. AIAA 2003-7081.
- [7] MARTHINUS C VAN SCHOOR, ANDREAS H VON FLOTOW. Aeroelastic characteristics of a highly flexible aircraft[J]. *Journal of Aircraft*, 1990, 27(10): 901-908.
- [8] MAYURESH J PATIL, DEWEY H HODGES, CARLOS E S CESNIK. Nonlinear aeroelasticity and flight

- dynamics of high-altitude long-endurance aircraft[R]. AIAA-99-1470.
- [9] 袁建平. 弹性飞行器动力学与控制文集[C]. 中国宇航学会, 1995. 9.
- [10] 陈志敏, 徐敏, 陈刚. 弹性飞行器动力学与控制研究现状和发展趋势[J]. 中国民航飞行学院学报, 2005, 16(1): 3-7.
- [11] DAVID K SCHMIDT, DAVID L RANEY. Modeling and simulation of flexible flight vehicles[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, 24(3): 539-546.
- [12] LIVNE E, TERRENCE A WEISSHAAR. Aeroelasticity of nonconventional airplane configurations-past and future [J]. *Journal of aircraft*, 2003, 40(6): 1047-1065.
- [13] WEIHUA SU, CARLOS E S CESNIK. Nonlinear aeroelasticity of a very flexible blended-wing-body aircraft [R]. AIAA 2009-2402.
- [14] BISPLINGHOFF R L, ASHLEY H, HALFMAN R L. Aeroelasticity[M]. Dover, New York, 1996.
- [15] COLLAR A R. The expanding domain of aeroelasticity [J]. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 1946, (50): 613-636.
- [16] CHRISTOPHER M SHEARER, CARLOS E S CESNIK. Nonlinear flight dynamics of very flexible aircraft[J]. *Journal of aircraft*, 2007, 44(5): 1528-1545.
- [17] THOMS E NOLL, JOHN M BROWN, MARLA E PEREZ DAVIS. Investigation of the helios prototype aircraft mishap [DB/OL]. http://www.nasa.gov/pdf/64317main_helios.pdf
- [18] CHRISTOPHER M SHEARER. Coupled nonlinear flight dynamic, aeroelasticity, and control of very flexible aircraft[D]. University of Michigan, 2006.
- [19] CAVIN R K, DUSTO A R. Hamilton's principle; finite-element methods and flexible body dynamics[J]. *AIAA Journal*, 1977, 15(12): 1684-1690.
- [20] MAYURESH J PATIL. Nonlinear aeroelastic analysis, flight dynamics, and control of a complete aircraft[D]. Georgia Institute of Technology, 1999.
- [21] MARTIN R W, DAVID K S. Flight dynamics of aeroelastic vehicles[J]. *Journal of Aircraft*, 1988, 25(6): 563-571.
- [22] CHRISTIAN RESCHKE. Flight loads analysis with initially coupled equations of motion [R]. AIAA 2005-6026.
- [23] CANAVIN J R, LIKINS P W. Floating reference frames for flexible spacecraft [J]. *Journal of Spacecraft*, 1977, 14(12): 724-732.
- [24] MILNE R D. Some remarks on the dynamics of deformable bodies[J]. *AIAA Journal*, 1986, 6(3): 556-558.
- [25] MILNE R D. Dynamics of the deformable aeroplane [R]. Reports and Memoranda No. 3345, 1962.
- [26] CAREY S BUTTRILL, THOMAS A ZEILER, P DOUGLAS ARBUCKLE. Nonlinear simulation of a flexible aircraft in maneuvering flight[R]. AIAA 87-2501.
- [27] MARTIN R WASZAK, CAREY S BUTTRILL, DAVID K SCHMIDT. Modeling and model simplification of aeroelastic vehicles; an overview[R]. NASA Technical Memorandum 107691.
- [28] 刘宝, 章卫国. 弹性飞机的建模与模型降阶方法研究[J]. 计算机仿真, 2008, 25(5): 29-43.
- [29] WU ZHIGANG, YANG CHAO. Flight loads and dynamics of flexible air vehicles[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2004, 17(1): 17-22.
- [30] FRIEDMANN P P, MCNAMARA J J, THURUTHI-MATTAM B J, et al. Aeroelastic analysis of hypersonic vehicles[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2004, (19): 681-712.
- [31] FLAVIO J SILVESTRE, PEDRO PAGLIONE. Dynamics and control of a flexible aircraft[R]. AIAA 2008-6876.
- [32] DAMVELD H J, MULDER J A. Influence of instationary aerodynamics and trimming on the dynamics of an aeroelastic aircraft[R]. AIAA 2005-6334.
- [33] PATRICK H U, MARC BODSON. Towards real-time simulation of aeroservoelastic dynamic for a flight vehicle from subsonic to hypersonic regime [R]. AIAA 2008-6375.
- [34] LEONARD MEIROVITCH, HAROLD D NELSON. On the high-spin motion of a satellite containing elastic parts [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1966, 3(11): 1597-1602.
- [35] LEONARD MEIROVITCH. Hybrid state equation of motion for flexible bodies in terms of quasi-coordinates [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamic*, 1991, 14(5): 1008-1013.
- [36] LEONARD MEIROVITCH, ILHAN TUZCU. Unified theory for the dynamics and control of maneuvering flexible aircraft[J]. *AIAA Journal*, 2004, 42(4): 714-727.
- [37] ILHAN TUZCU. Dynamics and control of flexible aircraft[D]. Virginia Polytechnic Institute and State University, 2001.
- [38] LEONARD MEIROVITCH, ILHAN TUZCU. The lure of the mean axes[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2007, (74): 497-504.