



基于速度分裂法的翼型阵风响应及减缓数值模拟

高坤 郭同庆 纪哲翰 周迪 陆志良

Numerical simulations of airfoil gust response and alleviation based on split velocity method

GAO Kun, GUO Tongqing, JI Zhehan, ZHOU Di, LU Zhiliang

引用本文:

高坤, 郭同庆, 纪哲翰, 等. 基于速度分裂法的翼型阵风响应及减缓数值模拟[J]. 空气动力学学报, 2023, 41(4): 84–95. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2022.0123

GAO Kun, GUO Tongqing, JI Zhehan, et al. Numerical simulations of airfoil gust response and alleviation based on split velocity method[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2023, 41(4): 84–95. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2022.0123

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2022.0123>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

不同飞行状态下机体耦合桨叶的阵风响应分析

Gust response analysis for helicopter rotors coupled with fuselage in different flights

空气动力学学报. 2018, 36(6): 1052–1060 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2018.0036>

飞行器气动弹性风洞试验技术综述

A survey of aeroelastic wind tunnel test technology of flight vehicles

空气动力学学报. 2018, 36(6): 995–1008 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2018.0039>

大展弦比机翼翼段气动弹性效应下拓扑优化分析

Topology optimization of high-aspect-ratio wing section considering aeroelastic effect

空气动力学学报. 2018, 36(6): 1047–1051 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2018.0024>

电磁力作用下槽道流速响应的放大机理

Amplification mechanism of the velocity response with the effect of electro-magnetic force in channel flow

空气动力学学报. 2020, 38(3): 490–499 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2019.0165>

大展弦比柔性机翼气动弹性分析中的气动力方法研究进展

Development of aerodynamic methods in aeroelastic analysis for high aspect ratio flexible wings

空气动力学学报. 2018, 36(6): 1009–1018 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2018.0237>

超大规模气动弹性数值模拟软件研制(2017)

Software development of ultra-scale numerical simulation for aero-elastic problem (2017)

空气动力学学报. 2018, 36(6): 1019–1026 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2018.0030>

地址: 四川省绵阳市二环路南段8号11信箱9分箱
电话: 0816-2463375
Email: kqdlxxb@163.com
网址: <http://kqdlxxb.xml-journal.net/>



关注微信公众号
获得更多资讯信息

文章编号: 0258-1825(2023)04-0084-12

基于速度分裂法的翼型阵风响应 及减缓数值模拟

高 坤, 郭同庆*, 纪哲翰, 周 迪, 陆志良

(南京航空航天大学 非定常空气动力学与流动控制工业和信息化部重点实验室, 南京 210016)

摘 要:国内现阶段飞行器阵风响应 CFD 模拟通常采用网格速度法(FVM), 而近年提出的更为准确的速度分裂法(SVM)目前主要针对刚性飞行器阵风响应分析。本文将 SVM 拓展至弹性翼型的 One-Minus-Cosine 阵风响应计算和减缓研究。基于动态网格系统非定常 Navier-Stokes 方程, 将阵风条件下的速度场分解为阵风速度与背景速度的叠加, 理论推导出 SVM 阵风模拟控制方程, 结果表明, FVM 是 SVM 忽略源项后的一种近似方法。进一步建立起弹性翼型阵风响应预测的 CFD/CSD 时域耦合算法和基于俯仰控制的阵风响应减缓数值模拟方法。算例分析了 NACA0012 刚性及弹性翼型的 One-Minus-Cosine 阵风响应, 计算结果与文献数据一致, 在此基础上分析了阵风尺度、黏性和结构弹性对阵风响应的影响。开展了 NACA64A010 弹性翼型 One-Minus-Cosine 阵风减缓模拟, 结果表明: 单一的沉浮速度控制输入量更有利于减缓阵风载荷峰值, 而沉浮速度、俯仰角相结合的控制输入量则能同时减缓翼型的沉浮和俯仰运动。本文工作可为三维飞行器阵风响应和减缓研究提供参考。

关键词:阵风响应; 网格速度法; 速度分裂法; 气动弹性; 载荷减缓

中图分类号: V211.47

文献标识码: A

doi: 10.7638/kqdlxxb-2022.0123

Numerical simulations of airfoil gust response and alleviation based on split velocity method

GAO Kun, GUO Tongqing*, JI Zhehan, ZHOU Di, LU Zhiliang

(Key Laboratory of Unsteady Aerodynamics and Flow Control of Ministry of Industry and Information Technology,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: It is a common practice for domestic researchers to conduct Computational Fluid Dynamics (CFD) simulations of the aircraft gust response using the field velocity method (FVM). The more accurate split velocity method (SVM) proposed recently has become progressively popular for gust response analysis but is limited to rigid aircraft. This paper extends SVM to simulate the One-Minus-Cosine gust response of elastic airfoils and to alleviate the gust load. First, velocity fields obtained by solving unsteady Navier-Stokes equations in dynamic meshes are decomposed into the gust and background velocities. The control equations of SVM are derived, which show that FVM is an approximation of SVM when neglecting the source term. Next, the CFD/CSD coupling algorithms in the time domain are established for the elastic airfoil gust response prediction and the gust response alleviation based on pitch control. The One-Minus-Cosine gust responses of rigid and elastic NACA0012 airfoils agree well with the reference data. The effects of gust length, viscosity, and structural elasticity on gust response are also analyzed. Finally, the One-Minus-Cosine gust alleviation simulation of the elastic NACA64A010 airfoil is conducted. Results show that changing only the plunge speed is more efficient in

收稿日期: 2022-08-22; 修订日期: 2022-09-07; 录用日期: 2022-09-13; 网络出版时间: 2022-10-13

基金项目: 国家自然科学基金(11872212, 12102187); 江苏省高校优势学科建设工程资助项目

作者简介: 高坤(1998-), 男, 陕西铜川人, 硕士研究生, 研究方向: 气动弹性力学. E-mail: gaok0529@163.com

通信作者: 郭同庆*, 教授, 研究方向: 计算流体力学, 气动弹性力学. E-mail: guotq@nuaa.edu.cn

引用格式: 高坤, 郭同庆, 纪哲翰, 等. 基于速度分裂法的翼型阵风响应及减缓数值模拟[J]. 空气动力学学报, 2023, 41(4): 84-95.

GAO K, GUO T Q, JI Z H, et al. Numerical simulations of airfoil gust response and alleviation based on split velocity method[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2023, 41(4): 84-95(in Chinese). doi: 10.7638/kqdlxxb-2022.0123

alleviating the peak gust load; the combined control of plunge speed and pitch angle can alleviate the plunge and pitch movements. This work lays a foundation for further study on gust response and alleviation of three-dimensional aircraft.

Keywords: gust response; field velocity method; split velocity method; aeroelasticity; load alleviation

0 引言

阵风载荷响应作为一种气动弹性动力响应问题,是指飞行器在大气中飞行时遇到突然的阵风扰动,这一扰动气流将改变飞机气动升力面的有效迎角,引起升力等的突然改变,使得飞行器产生涉及弹性变形的阵风载荷响应。当飞行器处于阵风环境中时,飞行器结构将承载较大的阵风载荷,这将导致飞行器操纵困难且容易发生结构疲劳损坏。随着航空科学技术的发展,大型飞行器的结构设计朝着低重量和大柔性方向发展,这导致阵风对大型飞行器的飞行影响更为复杂^[1]。因此,对于现代飞行器设计,其阵风响应分析的非定常气动模型由传统线化理论逐渐转向更为准确的CFD技术,其中阵风效应的嵌入主要分为远场边界条件法和给定流场阵风速度法两类。

将阵风加入CFD程序最直接的方法是修改计算域远场边界条件,称为远场边界条件(far-field boundary condition, FBC)法^[2]。该方法为防止因计算域网格分辨率不足引起数值耗散导致阵风响应计算精度下降,要求计算域网格从物体表面到远场边界均需要非常精细,这将导致高昂的计算成本。为此, Tang 和 Bader^[3]提出根据阵风在计算域中所处位置的变化对计算域网格进行局部细化,该方法采用高阶多项式插值来重新分布网格点以获得阵风区域更新后的精细网格^[4]。

给定速度法根据每一时刻阵风场在计算域中的空间位置来计算阵风速度,因此不存在远场边界条件法中因远离物面区域网格分辨率不足而引起的数值耗散问题,被广泛应用于阵风响应数值计算。给定速度法包括网格速度法(field velocity method, FVM)和速度分裂法(split velocity method, SVM)。其中, FVM由 Parameswaran 和 Bader 提出^[5],该方法借用动态网格系统流动控制 Euler/N-S 方程,将阵风速度等效为流场当地网格速度来模拟阵风运动,但实际并不会引起网格运动。他们采用 FVM 模拟翼型穿越阶跃阵风时的气动响应,计算结果与理论分析结果十分接近。然而, FVM 并非通过严格理论推导得来^[6],也没有考虑翼型对阵风的影响。顾宁等^[7]指出当 FVM 应用于 N-S 方程时需要加入黏性通量修正。相比而言,由 Wales 等^[8]提出的 SVM 则是以非定常 Euler/N-S 方程为基础,将阵风条件下的流场速度分解为阵风速

度与无阵风作用下的流场背景速度两部分,严格理论推导出 SVM 阵风模拟控制方程。与 FVM 相比,除阵风速外, SVM 还包括了阵风对黏性通量的影响以及与阵风时空导数相关的源项。此方法已被证明在较短阵风尺度、跨声速等条件下的阵风响应模拟中能够获得更为准确的计算结果^[8]。

目前,国内还尚未开展基于 SVM 的飞行器阵风响应模拟和减缓研究。本文针对 One-Minus-Cosine 离散阵风,首先基于动态网格系统非定常 N-S 方程,理论推导 SVM 阵风响应模拟的控制方程。然后耦合翼型结构运动方程,发展基于 SVM 的弹性翼型阵风响应 CFD/CSD 时域耦合算法。进而采用控制翼型旋转,发展弹性翼型阵风载荷减缓的数值模拟方法。最后采用上述方法,开展刚性及弹性翼型阵风响应和减缓分析。

1 阵风模型

本文针对 One-Minus-Cosine 型离散阵风开展翼型阵风响应分析。飞行器以速度 V 水平飞行,突然受到速度为 w_g 的垂向阵风作用。 w_g 为阵风速度 V_g 在直角坐标系下的垂向分量,定义如下^[9]:

$$w_g(x_g) = \begin{cases} \frac{\bar{w}_g}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x_g}{L_g} \right), & 0 \leq x_g \leq L_g \\ 0, & x_g < 0 \text{ 或 } x_g > L_g \end{cases} \quad (1)$$

其中: L_g 为阵风尺度; $\bar{w}_g = V \tan(\Delta\alpha)$ 为阵风速度幅值; $\Delta\alpha$ 为阵风速度幅值等效迎角。

2 阵风响应 CFD 模拟方法

2.1 网格速度法(FVM)

本节简要给出 FVM^[10-11] 的控制方程,便于与 SVM 方法进行比较。动态网格系统下非定常 N-S 方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \tilde{u} \\ \rho \tilde{w} \\ \rho E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho(\tilde{u} - x_t) \\ \rho \tilde{u}(\tilde{u} - x_t) + p \\ \rho \tilde{w}(\tilde{u} - x_t) \\ \rho E(\tilde{u} - x_t) + p \tilde{u} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \rho(\tilde{w} - z_t) \\ \rho \tilde{u}(\tilde{w} - z_t) \\ \rho \tilde{w}(\tilde{w} - z_t) + p \\ \rho E(\tilde{w} - z_t) + p \tilde{w} \end{bmatrix} \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{xx} \\ \tilde{\sigma}_{xz} \\ \tilde{u} \tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{w} \tilde{\sigma}_{xz} + q_x \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{xz} \\ \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{u} \tilde{\sigma}_{xz} + \tilde{w} \tilde{\sigma}_{zz} + q_z \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{w}^2) \quad (3)$$

其中: $\tilde{u}$ 、 $\tilde{w}$ 为背景流场速度 $\tilde{\mathbf{V}}$ 的速度分量; x_t 、 z_t 为网格速度 $\mathbf{V}_t$ 的分量; ρ 为流体密度; E 为单位质量流体总能; p 为流体压强; γ 为比热比。

根据相对运动原理, 如果计算域网格的运动速度为 $\mathbf{V}_t$, 则等价于在计算域静止情况下受到速度为 $-\mathbf{V}_t$ 的气流作用^[12]。因此, 基于动态网格系统非定常 N-S 方程(2), FVM 将阵风速度表示为相反方向的网格速度来模拟阵风作用^[13], 即:

$$x_t = -u_g, \quad z_t = -w_g \quad (4)$$

需要注意的是, FVM 只是利用了网格速度的概念, 在实施过程中并不引起实际的网格运动。尽管 FVM 是目前阵风响应 CFD 分析的主要方法, 但该方法并未得到严格的理论阐明。

2.2 速度分裂法 (SVM)

SVM 将阵风条件下的流场速度分解为阵风速度与流场背景速度两部分, 即

$$u = \tilde{u} + u_g, \quad w = \tilde{w} + w_g \quad (5)$$

其中, u 、 w 为流场总速度 $\mathbf{V}$ 的速度分量。为了开展考虑气动弹性的阵风响应分析, 接下来将现有的基于固定网格系统的 SVM 方法^[14]拓展至动态网格系统。包含阵风作用的动态网格系统下非定常 N-S 方程可写为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho(u-x_t) \\ \rho u(u-x_t) + p \\ \rho(u-x_t)w \\ (u-x_t)(\rho E + p) + x_t p \end{bmatrix} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \rho(w-z_t) \\ \rho(w-z_t)u \\ \rho w(w-z_t) + p \\ (w-z_t)(\rho E + p) + z_t p \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \\ u\sigma_{xx} + w\sigma_{xz} + q_x \end{bmatrix} \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ u\sigma_{xz} + w\sigma_{zz} + q_z \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) \quad (7)$$

联合式(5)~式(7), 并利用背景流场的连续方程和动量方程, 可得 SVM 的控制方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \tilde{u} \\ \rho \tilde{w} \\ \rho \tilde{E} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho(\tilde{u} + u_g - x_t) \\ \rho \tilde{u}(\tilde{u} + u_g - x_t) + p \\ \rho \tilde{w}(\tilde{u} + u_g - x_t) \\ \rho \tilde{E}(\tilde{u} + u_g - x_t) + p \tilde{u} \end{bmatrix} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \rho(\tilde{w} + w_g - z_t) \\ \rho \tilde{u}(\tilde{w} + w_g - z_t) \\ \rho \tilde{w}(\tilde{w} + w_g - z_t) + p \\ \rho \tilde{E}(\tilde{w} + w_g - z_t) + p \tilde{w} \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{xx} \\ \tilde{\sigma}_{xz} \\ \tilde{u}\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{w}\tilde{\sigma}_{xz} + q_x \end{bmatrix} \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{xz} \\ \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{u}\tilde{\sigma}_{xz} + \tilde{w}\tilde{\sigma}_{zz} + q_z \end{bmatrix} + \mathbf{S} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中黏性应力张量的表达式为:

$$\sigma_{xx} = \tilde{\sigma}_{xx} + \sigma_{gxx} = \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) + \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial w_g}{\partial z} \right) \quad (9)$$

$$\sigma_{zz} = \tilde{\sigma}_{zz} + \sigma_{gzz} = \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial w_g}{\partial z} - \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) \quad (10)$$

$$\sigma_{xz} = \tilde{\sigma}_{xz} + \sigma_{gxz} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_g}{\partial z} + \frac{\partial w_g}{\partial x} \right) \quad (11)$$

其中, μ 为黏性系数。式(8)中附加源项为:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \begin{bmatrix} 0 \\ S_m(u_g) - \frac{\partial \sigma_{gxx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{gxz}}{\partial z} \\ S_m(w_g) - \frac{\partial \sigma_{gxz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{gzz}}{\partial z} \\ S_e(u_g, w_g) - \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u}\sigma_{gxx} + w_g\sigma_{gxz}) - \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{u}\sigma_{gxz} + w_g\sigma_{gzz}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

若采用 Euler 方程, 黏性通量为 0, 则附加源项为:

$$\mathbf{S} = [0 \quad S_m(u_g) \quad S_m(w_g) \quad S_e(u_g, w_g)]^T \quad (13)$$

S_m 、 S_e 分别定义如下:

$$S_m(\cdot) = \rho \left\{ \frac{\partial \cdot}{\partial t} + (\tilde{u} + u_g - x_t) \frac{\partial \cdot}{\partial x} + (\tilde{w} + w_g - z_t) \frac{\partial \cdot}{\partial z} \right\} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} S_e(u_g, w_g) = & \tilde{u} S_m(u_g) + \tilde{w} S_m(w_g) + p \left[\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial w_g}{\partial z} \right] - \\ & \sigma_{xx} \frac{\partial u_g}{\partial x} - \sigma_{zz} \frac{\partial w_g}{\partial z} - \sigma_{xz} \left[\frac{\partial w_g}{\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

不难看出, 相比于 SVM, 传统 FVM 的动量方程和能量方程缺少了上述附加源项。该源项与阵风场的时间和空间导数相关, 反映了背景流场对阵风场的影响

响。对于小尺度阵风或存在激波情形，附加源项的作用将会凸显。

本文离散阵风形式由式(1)给定，因此源项中阵风相关的导数可以解析求解。采用有限体积法、双时间推进法^[15]求解包含阵风作用的动态网格系统下的非定常 N-S 方程(8)，采用并行算法提高计算效率；基于 RANS 模拟湍流，湍流模型选用 SA 一方程模型^[16]。远场采用无反射边界条件，物面采用黏性无滑移边界条件，即 $\tilde{u} = u_g - x_t$ 、 $\tilde{w} = w_g - z_t$ 。本文后续弹性翼型阵风响应及载荷减缓计算均采用无限插值法(TFI)^[17]生成动态网格。

3 弹性翼型阵风响应 CFD/CSD 时域模拟方法

3.1 三自由度结构运动方程

图1给出了一个具有沉浮、俯仰和控制面偏转的三自由度典型二元翼段力学模型。图中三个自由度为：刚心 E 的沉浮位移 h ，向下为正；翼段绕刚心的俯仰角位移 α ，抬头为正；控制面偏转角 β ，向下偏转为正。弹性轴 E 距离翼弦中点的距离为 $a_h b$ ， a_h 为基于半弦长 b 的无量纲距离，弹性轴在翼弦中点之后时 $a_h > 0$ 。 $C_\beta b$ 表示控制面铰链轴距翼型弦线中点的距离，其气动弹性运动方程为^[18-21]：

$$\begin{cases} -L = m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + S_\beta \ddot{\beta} + T_h \dot{h} + K_h h \\ M_\alpha = S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + [(C_\beta - a_h)bS_\beta + I_\beta] \ddot{\beta} + T_\alpha \dot{\alpha} + K_\alpha \alpha \\ H_\beta = S_\beta \ddot{h} + [(C_\beta - a_h)bS_\beta + I_\beta] \ddot{\alpha} + I_\beta \ddot{\beta} + T_\beta \dot{\beta} + K_\beta \beta \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c C_L \\ M_\alpha &= \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 C_m \\ H_\beta &= \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 C_H \end{aligned} \quad (17)$$

其中： m 为翼段质量； I_α 、 I_β 分别为翼段绕刚心和控制面绕铰链轴的转动惯量； S_α 、 S_β 分别为翼段和控制面的质量静矩； T_h 、 T_α 和 T_β 分别为翼段的沉浮、俯仰和控制面转动阻尼系数； K_h 、 K_α 和 K_β 分别为翼段的沉浮、俯仰和控制面转动刚度； L 、 M_α 和 H_β 分别为升力、俯仰力矩和铰链力矩； C_L 、 C_m 和 C_H 分别为升力系数、俯仰力矩系数和铰链力矩系数； ρ_∞ 为自由来流密度； c 为翼型弦长。

式(16)的无量纲形式为：

$$M\theta'' + \frac{2M_\infty \sqrt{\gamma}}{V^* \sqrt{\mu}} T\theta' + \frac{4M_\infty^2 \gamma}{V^{*2} \mu} K\theta = \frac{4M_\infty^2 \gamma}{\pi \mu} \sigma_a \quad (18)$$

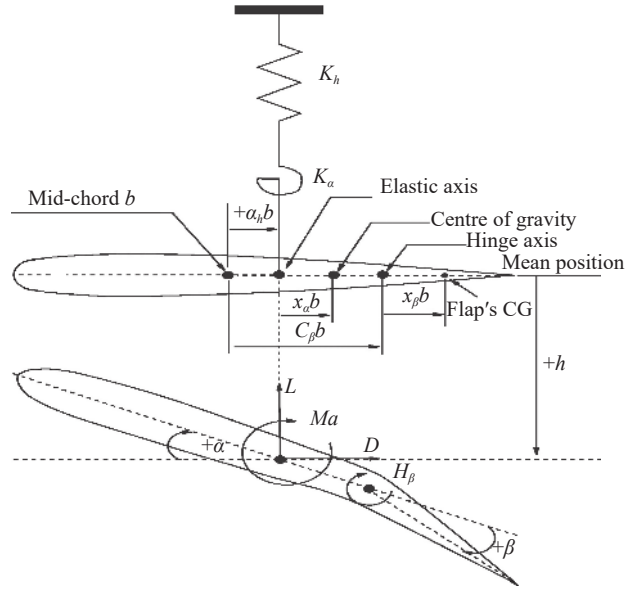


图1 三自由度典型翼段力学模型^[21]

Fig. 1 Sketch of an airfoil with three degrees of freedom^[21]

其中： $(\cdot) = d(\cdot)/d\tau$ 、 $(\cdot\cdot) = d^2(\cdot)/d\tau^2$ ； $\tau = a_\infty t / (c\sqrt{\gamma})$ 为结构无量纲时间， a_∞ 为声速； θ 为无量纲结构位移； σ_a 为非定常气动系数； $V^* = V_\infty / (\omega_\alpha b \sqrt{\mu})$ 为无量纲速度； $\mu = m / (\pi \rho_\infty b^2)$ 为质量比。 $\xi = h/c$ 为无量纲沉浮位移； ζ 为结构阻尼。 M 、 T 、 K 分别为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，其定义分别为：

$$M = \begin{bmatrix} 2 & x_\alpha & x_\beta \\ 2x_\alpha & r_\alpha^2 & (C_\beta - a_h)x_\beta + r_\beta^2 \\ 2x_\beta & (C_\beta - a_h)x_\beta + r_\beta^2 & r_\beta^2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 4\zeta_h \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta_\alpha r_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_\beta \left(\frac{\omega_\beta}{\omega_\alpha} \right) r_\beta^2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2 \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\omega_\beta}{\omega_\alpha} \right)^2 r_\beta^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$x_\alpha = S_\alpha / (mb)$$

$$x_\beta = S_\beta / (mb)$$

$$r_\alpha^2 = I_\alpha / (mb^2)$$

$$r_\beta^2 = I_\beta / (mb^2)$$

$$\begin{aligned}
\zeta_h &= T_h / (2m\omega_h) \\
\zeta_\alpha &= T_\alpha / (2I_\alpha\omega_\alpha) \\
\zeta_\beta &= T_\beta / (2I_\beta\omega_\beta) \\
\omega_h &= \sqrt{K_h/m} \\
\omega_\alpha &= \sqrt{K_\alpha/I_\alpha} \\
\omega_\beta &= \sqrt{K_\beta/I_\beta} \\
\theta &= [\xi \quad \alpha \quad \beta]^T \\
\sigma_a &= [-C_L \quad 2C_m \quad 2C_H]^T
\end{aligned}$$

为了便于在时域中求解结构运动方程(18), 将其转换为状态空间形式:

$$\begin{aligned}
\eta' + A\eta + Rf &= 0 \\
\eta &= [\xi \quad \alpha \quad \beta \quad \xi' \quad \alpha' \quad \beta']^T \\
f &= [0 \quad \sigma_a]^T
\end{aligned} \quad (20)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \frac{4M_\infty^2\gamma}{V^{*2}\mu}M^{-1}K & \frac{2M_\infty\sqrt{\gamma}}{V^*\sqrt{\mu}}M^{-1}T \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4M_\infty^2\gamma}{\pi\mu}M^{-1} \end{bmatrix}$$

其中, I 为单位矩阵。

本文采用隐式欧拉法求解方程(20):

$$\frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta\tau} + A\eta^{n+1} + Rf = 0 \quad (21)$$

得到 $n+1$ 时刻的状态变量:

$$\eta^{n+1} = (I + \Delta\tau A)^{-1}(\eta^n - \Delta\tau Rf) \quad (22)$$

3.2 CFD/CSD 时域耦合计算流程

给定计算状态, 首先不考虑阵风作用, CFD 计算获得该状态下的定常流场, 然后基于定常流场开展阵风响应时域计算。基于定常流场, 引入阵风场, 在时域内耦合求解气动方程和结构运动方程, 从而求解出阵风作用下翼型气动响应和结构位移响应。

4 基于翼型俯仰运动的阵风减缓

类似旋转翼尖, 本文尝试通过控制翼型俯仰运动来进行阵风减缓。将翼型的俯仰控制角度 α_c 与其位移响应、速度响应和加速度响应联系起来,

$$\alpha_c = (G_1, G_2) \begin{pmatrix} \xi \\ \alpha \end{pmatrix} + (G_3, G_4) \begin{pmatrix} \xi' \\ \alpha' \end{pmatrix} + (G_5, G_6) \begin{pmatrix} \xi'' \\ \alpha'' \end{pmatrix} \quad (23)$$

其中, $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ 为控制系统增益。

将输入的 α_c 转换为等效俯仰控制力矩 (control pitching moment, CPM), 作为外部俯仰力矩添加到开环气动弹性运动方程中, 此时式(18)中俯仰运动自由度方程包含气动俯仰力矩 (aerodynamic pitching moment, APM) 和等效俯仰控制力矩:

$$\begin{aligned}
2x_\alpha \xi'' + r_\alpha^2 \alpha'' + [(C_\beta - a_h)x_\beta + r_\beta^2]\beta'' + \frac{4M_\infty\sqrt{\gamma}\zeta_\alpha}{V^*\sqrt{\mu}}r_\alpha^2 \alpha' \\
+ \frac{4M_\infty^2\gamma}{V^{*2}\mu}r_\alpha^2 \alpha = \underbrace{\frac{8M_\infty^2\gamma}{\pi\mu}C_m}_{\text{APM}} + \underbrace{\frac{4M_\infty^2\gamma}{V^{*2}\mu}r_\alpha^2 \alpha_c}_{\text{CPM}} \quad (24)
\end{aligned}$$

则式(18)右侧的 σ_a 应改写为 $\sigma = \sigma_a + \sigma_c$, 其中 $\sigma_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi r_\alpha^2}{V^{*2}} \alpha_c & 0 \end{bmatrix}^T$ 为控制力向量。

5 算例分析

5.1 刚性翼型阵风响应计算

分别采用 FVM 和 SVM 方法, 开展 NACA0012 刚性翼型的 One-Minus-Cosine 阵风响应计算分析。计算条件为: $Ma = 0.3$, 迎角 0° , $Re = 7.0 \times 10^6$; 力矩参考点位于 $0.4c$; 定义无量纲时间 $S = 2V_\infty t/c$ 。采用 C 型结构网格, 阵风从远场边界外进入计算域。根据文献[8]中不同网格数对比计算结果, 翼型周向和法向网格数取为 257×129 。翼型弦长 $c = 7.5\text{m}$, 远场边界位于 15 倍弦长处, 第一层网格高度为 $1 \times 10^{-3}c$, 如图 2 所示。本节除黏性对阵风响应影响分析采用 N-S 方程计算之外, 其余算例均采用 Euler 方程。

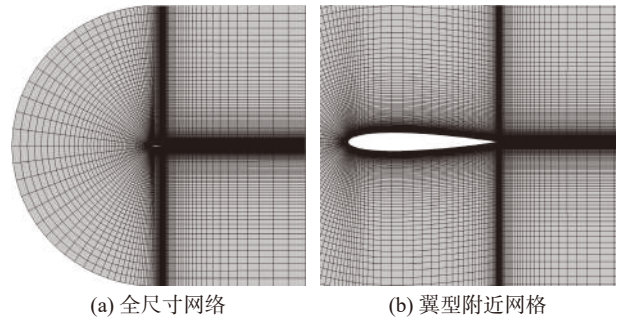


图 2 NACA0012 翼型计算网格

Fig. 2 Computational mesh for NACA0012

5.1.1 时间步长的确定

阵风尺度 $L_g = 1c$, 等效迎角 $\Delta\alpha = 2.0^\circ$ 。分别取时间步长 ΔS 为 0.1、0.01 和 0.001, 计算结果如图 3 所示。对于 FVM 和 SVM, $\Delta S = 0.1$ 时的升力系数最大值和力矩系数最大值均大于 $\Delta S = 0.01$ 或 $\Delta S = 0.001$ 时的最大值, 而 $\Delta S = 0.01$ 与 $\Delta S = 0.001$ 的结果相吻合, 因此本文时间步长取 $\Delta S = 0.01$ 。

图 4 比较了阵风尺度为 $1c$ 时本文计算得到的升

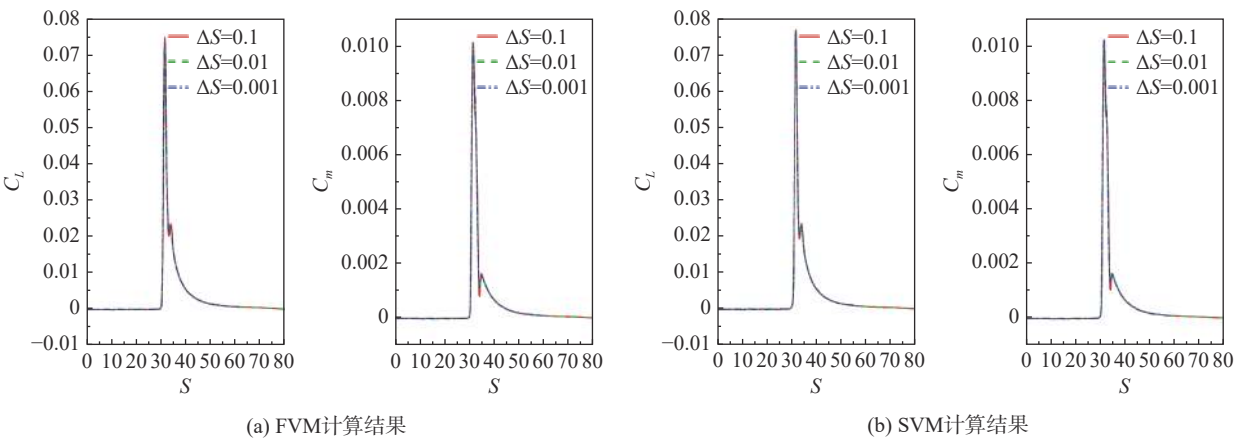


图 3 时间步长对 FVM 和 SVM 阵风响应的影响

Fig. 3 Effects of time step on gust response obtained by FVM and SVM

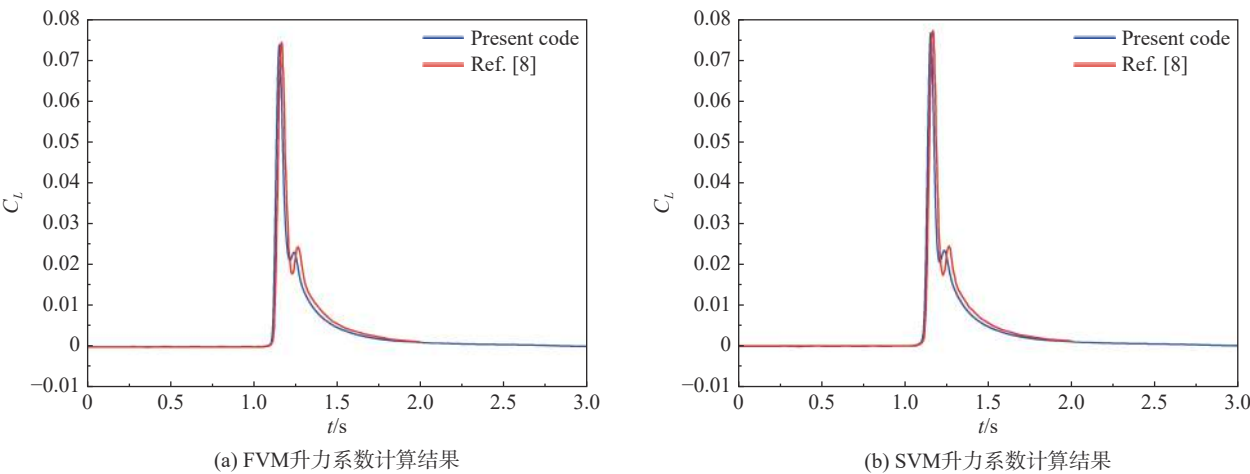


图 4 FVM 和 SVM 气动力阵风响应与文献结果对比

Fig. 4 Comparisons of aerodynamic responses between present and ref.[8] data

力系数阵风响应与文献 [8] 的结果。对于小尺度阵风，阵风梯度增大、作用域更为集中，在阵风离开翼型后缘的时间段内，升力系数产生小幅波动；除波动幅值存在一定差异外，本文 FVM 和 SVM 两种方法计算得到的升力系数峰值及其出现时刻均与文献结

果吻合良好。

进一步研究表明，阵风离开翼型后缘时升力系数小幅波动的幅值与翼型后缘厚度的处理方式直接相关。图 5 比较了尖后缘和钝后缘 NACA0012 翼型计算得到的升力系数阵风响应，钝后缘翼型后缘厚度

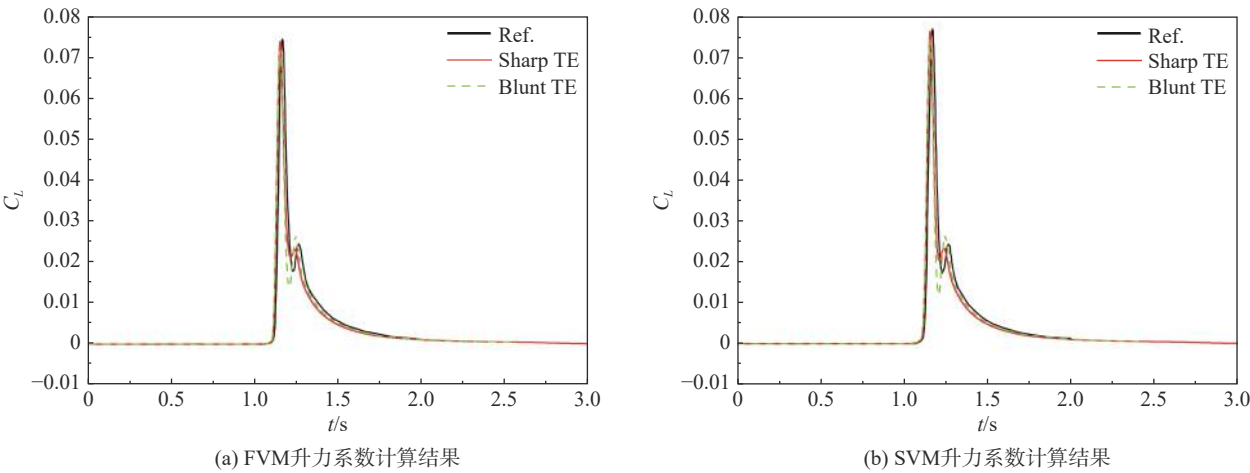


图 5 翼型后缘对阵风响应的影响

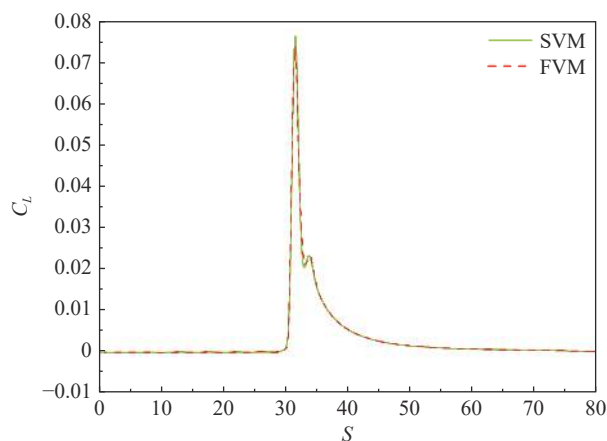
Fig. 5 Effects of airfoil trailing edge on gust response

为 $1.26\%c$ 。相比于尖后缘,阵风离开钝后缘翼型时升力系数响应的波动幅值更大,峰值略微降低。

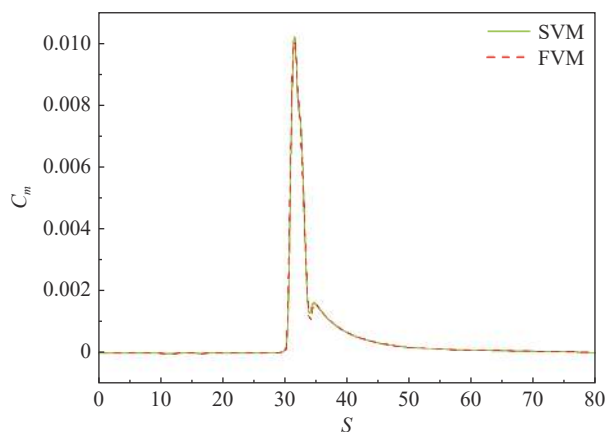
5.1.2 阵风尺度的影响

分别采用 FVM、SVM 计算阵风尺度 $1c$ 、 $5c$ 和 $10c$, 等效迎角 $\Delta\alpha = 2.0^\circ$ 的阵风响应, 计算结果如图 6 所示。在阵风尺度 $5c$ 和 $10c$ 时, FVM 和 SVM 的计算结果几乎一致。当阵风尺度减小到 $1c$ 时, 阵风场的

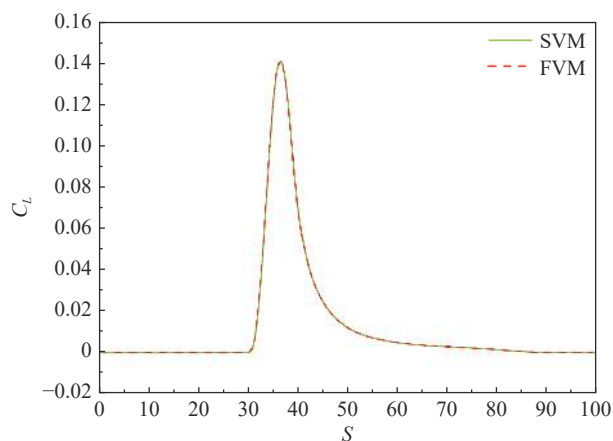
时空导数增大, SVM 方法中源项的作用凸显出来, 导致 FVM 和 SVM 的计算结果出现差异, SVM 计算得到的气动参数阵风响应峰值略高于 FVM。SVM 方法的推导过程表明 FVM 只是 SVM 忽略源项的一种近似方法, 因此理论上 SVM 的计算结果更为准确。随着阵风尺度的增加, 阵风场的时空导数减小, 阵风离开翼型后缘时气动系数的小幅波动现象消失。



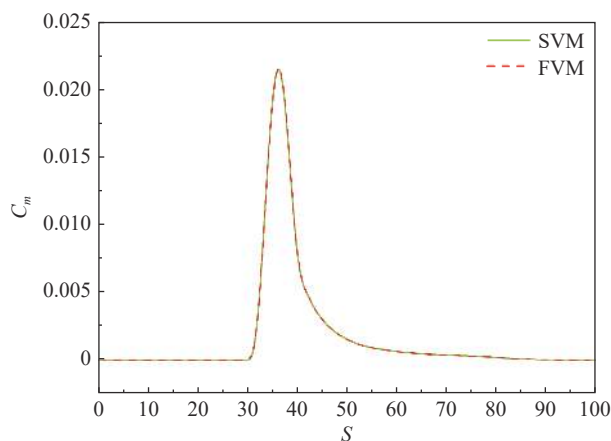
(a) $L_g=1c$, 升力系数计算结果



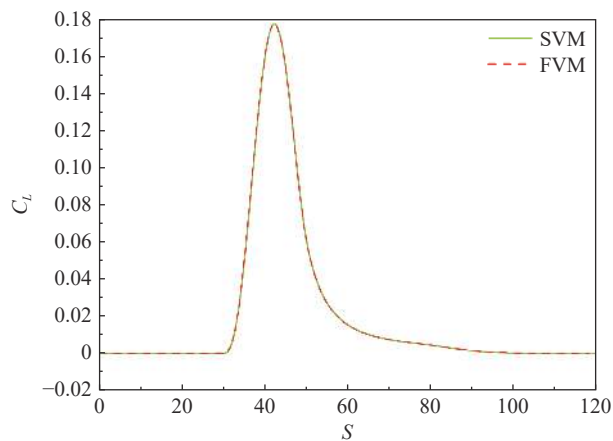
(b) $L_g=1c$, 力矩系数计算结果



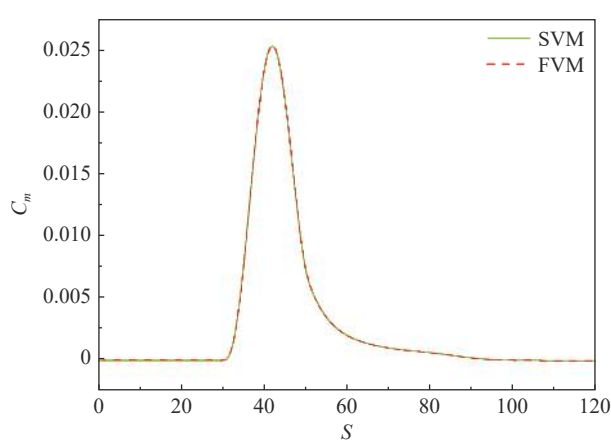
(c) $L_g=5c$, 升力系数计算结果



(d) $L_g=5c$, 力矩系数计算结果



(e) $L_g=10c$, 升力系数计算结果



(f) $L_g=10c$, 力矩系数计算结果

图 6 阵风尺度对 FVM 和 SVM 的阵风响应影响

Fig. 6 Gust length effect on gust responses obtained by FVM and SVM

5.1.3 黏性对阵风响应的影响

针对阵风尺度 $1c$ 和 $10c$ 、等效迎角 $\Delta\alpha = 2.0^\circ$ ，采用 SVM 方法开展 Euler、N-S 方程的阵风响应对比计算，其中 N-S 方程计算网格的第一层网格高度为 $1\times 10^{-5}c$ ，其他网格参数与 Euler 方程计算网格相同。计算结果对比如图 7 所示，黏性效应导致阵风响应的

升力系数峰值降低，阵风尺度越大，黏性对阵风场的影响越大，升力减小量越明显；黏性作用下， $1c$ 阵风离开翼型后缘时的升力系数波动明显减弱。

5.2 弹性翼型阵风响应计算

采用非定常 Euler 方程计算弹性 NACA0012 翼型的阵风响应。翼型结构模型参数^[22]由表 1 给出。

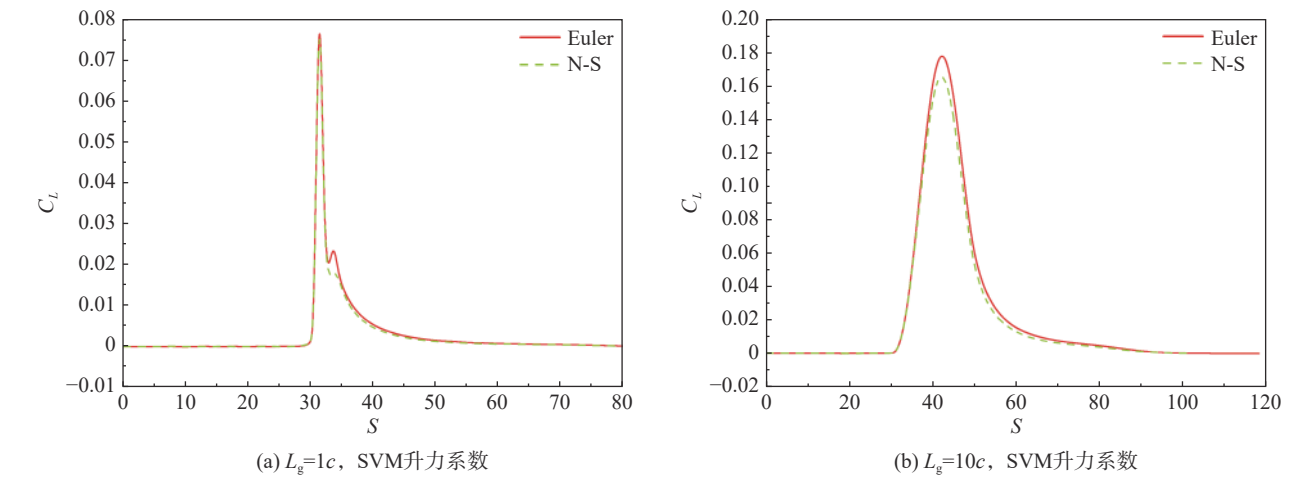


图 7 黏性对阵风响应的影响
Fig. 7 Viscosity effects on gust response

表 1 NACA0012 翼型结构参数							
Table 1 NACA0012 parameters							
参数	ω_h/ω_a	μ	a_h	x_a	r_a	ζ_h	ζ_a
量值	0.343	100.0	-0.2	0.2	0.539	0	0

5.2.1 阵风响应 CFD/CSD 耦合算法验证

选取文献 [22] 的计算参数， $Ma = 0.3$ ， $V^* = 0.2$ ，翼型弦长 $c = 1.0$ m。翼型结构位移的初始状态 $\xi(0) = 0$ ， $\alpha(0) = 0^\circ$ ，阵风尺度 $L_g = 6.25$ m，等效迎角 $\Delta\alpha = 0.57^\circ$ 。

考虑到文献计算方法为 FVM，本算例也采用 FVM。计算结果对比如图 8 所示。本文计算结果与文献 [22] 数据吻合，验证了本文弹性翼型阵风响应 CFD/CSD 耦合算法的可靠性。

5.2.2 弹性对翼型阵风响应的影响

采用 SVM 计算阵风尺度 $1c$ 和 $10c$ 、等效迎角 $\Delta\alpha = 2.0^\circ$ 的阵风响应， $V^* = 0.2$ ，翼型结构初始状态 $\xi(0) = 0$ ， $\alpha(0) = 0^\circ$ 。图 9 为刚性翼型和弹性翼型的气动系数阵

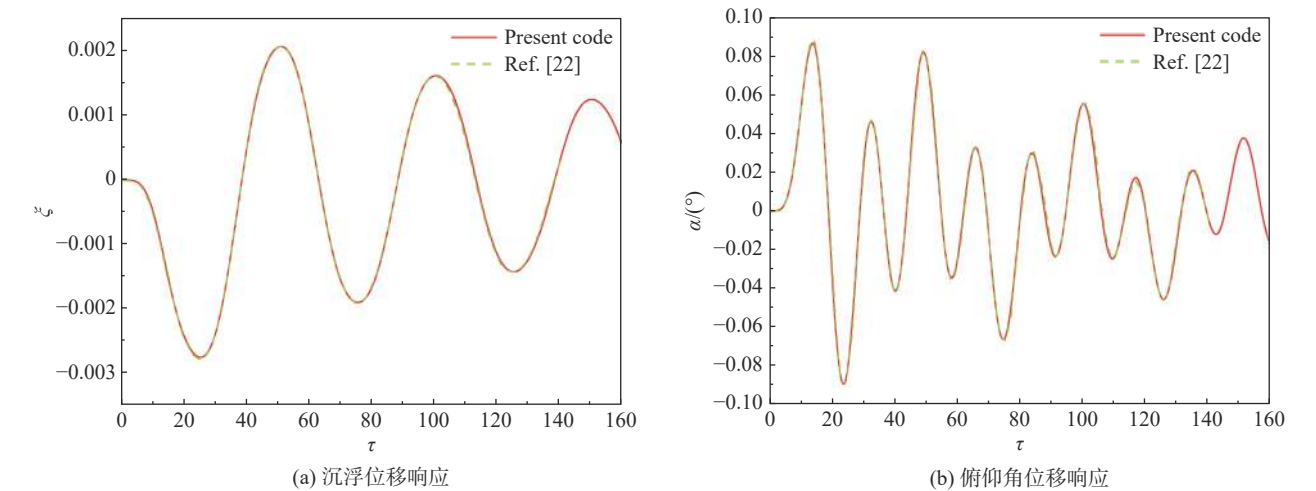


图 8 弹性翼型阵风响应与文献结果对比
Fig. 8 Comparison of gust responses of an elastic airfoil between present and reference results

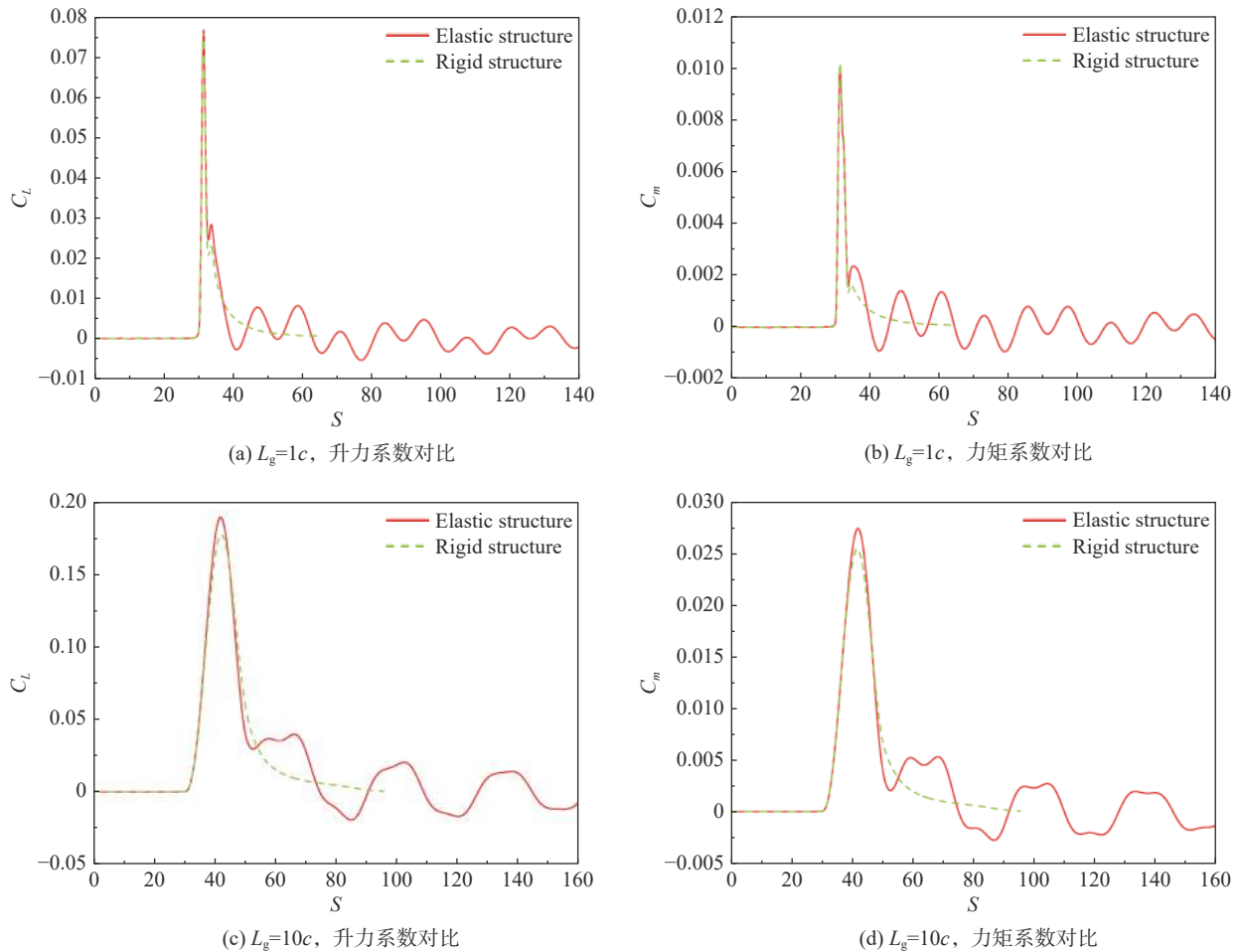


图 9 刚性和弹性翼型气动力阵风响应对比

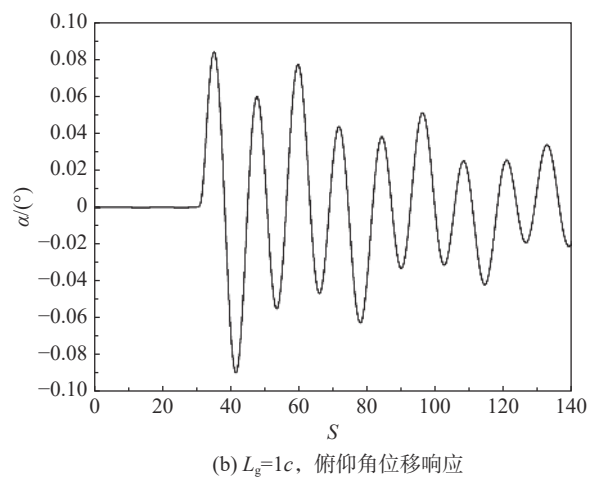
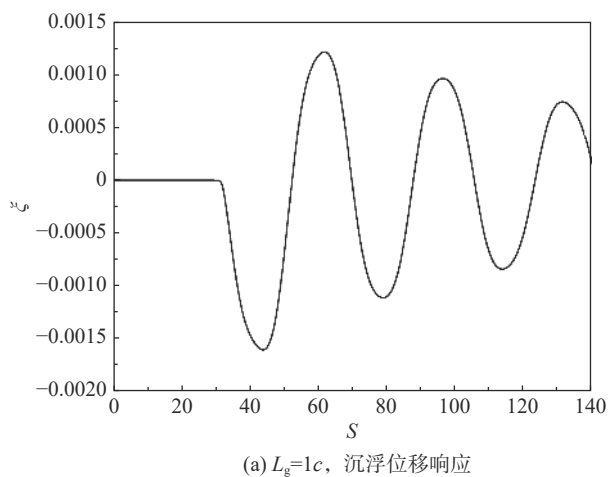
Fig. 9 Comparison of aerodynamic gust response between rigid and elastic airfoils

风响应对比。图 10 为弹性翼型的结构响应结果。在 One-Minus-Cosine 阵风穿越弹性翼型期间, 翼型的气动参数和俯仰角均先增大然后减小至极小值, 沉浮位移则一直增大至峰值; $10c$ 阵风穿越弹性翼型时, 升力和俯仰角近乎同时达到峰值, 导致升力峰值较刚性翼型增大; $1c$ 阵风穿越弹性翼型时, 俯仰角峰值远滞

后于升力峰值, 弹性对升力峰值几乎没有影响。

5.3 弹性翼型阵风载荷减缓

以 NACA64A010 翼型为研究对象, 翼型弦长 $c = 1.0 \text{ m}$, 其他网格参数与第 5.1 节 Euler 方程计算网格相同, 如图 11 所示。翼型结构参数^[23]如表 2 所示, 取 $Ma = 0.3$ 、 $V^* = 0.3374$ 。采用 SVM 进行翼型阵风载



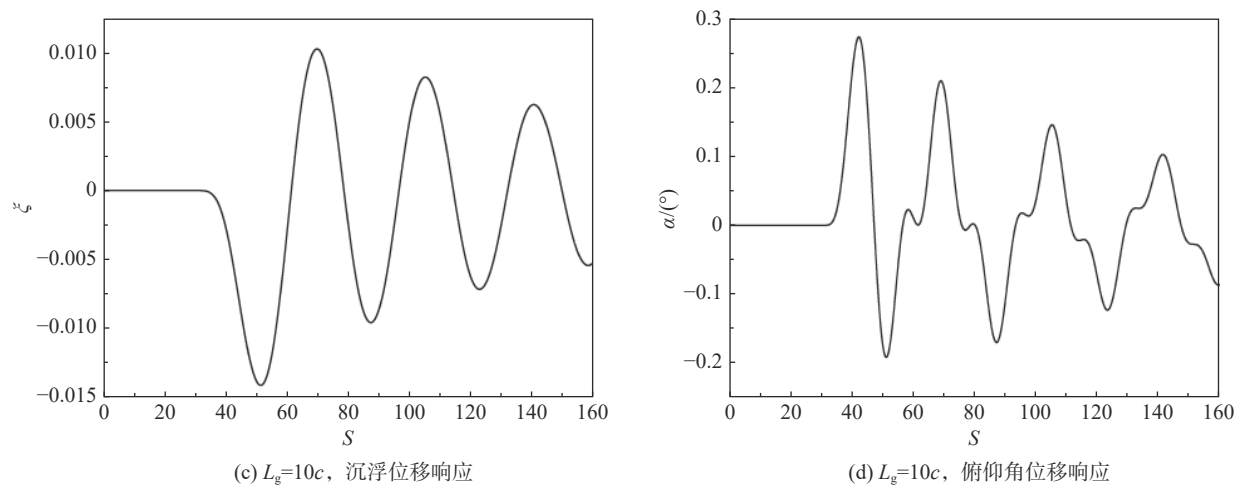


图 10 弹性翼型结构响应

Fig. 10 Structural response of an elastic airfoil

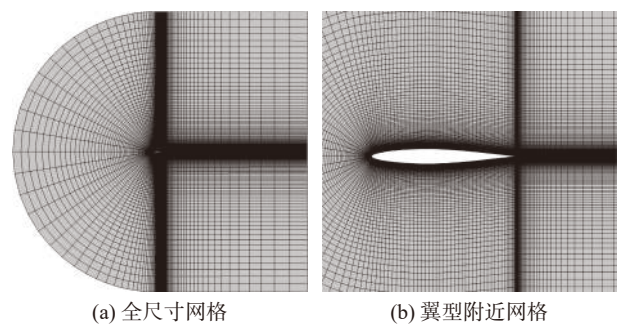


图 11 NACA64A010 翼型计算网格

Fig. 11 Computational mesh for NACA64A010

表 2 NACA64A010 翼型结构参数

Table 2 NACA64A010 parameters

参数	ω_h/ω_α	$\omega_\beta/\omega_\alpha$	μ	a_h	x_α	r_α	x_β	r_β	C_β	ζ_h	ζ_α	ζ_β
量值	0.3	1.5	23.48	-0.2	0.2	0.5	0.008	0.06	0.5	0	0	0

荷减缓响应计算。阵风尺度 $L_g = 10c$ ，等效迎角 $\Delta\alpha = 2.0^\circ$ 。翼型结构位移的初始状态 $\xi(0) = 0$ 、 $\alpha(0) = 0^\circ$ 、 $\beta(0) = 0^\circ$ 。本文以减缓翼型在通过阵风时产生的最大升力系数为目标。

弹性翼型阵风响应分析表明，在阵风穿越翼型期间，升力系数先增大后减小至极小值，而翼型沉浮位移则一直增大至极值，因此本文选取沉浮速度值作为控制输入量。图 12、图 13 为增益 G_3 分别取 5.0 和 10.0 时闭环控制系统与开环系统阵风响应的结果对比。采用 G_3 闭环控制情况下，沉浮运动峰值显著降低并迅速收敛；在升力系数峰值之前，由于翼型沉浮速度为负值， G_3 等效于给弹性翼型增加低头俯仰控制力矩，导致俯仰角、升力和力矩系数峰值明显降低， $G_3 = 10$ 时升力系数峰值降低 49.758%；当阵风离开翼型后，翼型沉浮速度为正值，俯仰控制力矩使翼

型俯仰角逐渐增大至正极大值点，并高于无控制情况，导致此时气动系数响应极值也均略高于无控制情况，并接近或高于阵风穿越翼型时的峰值。

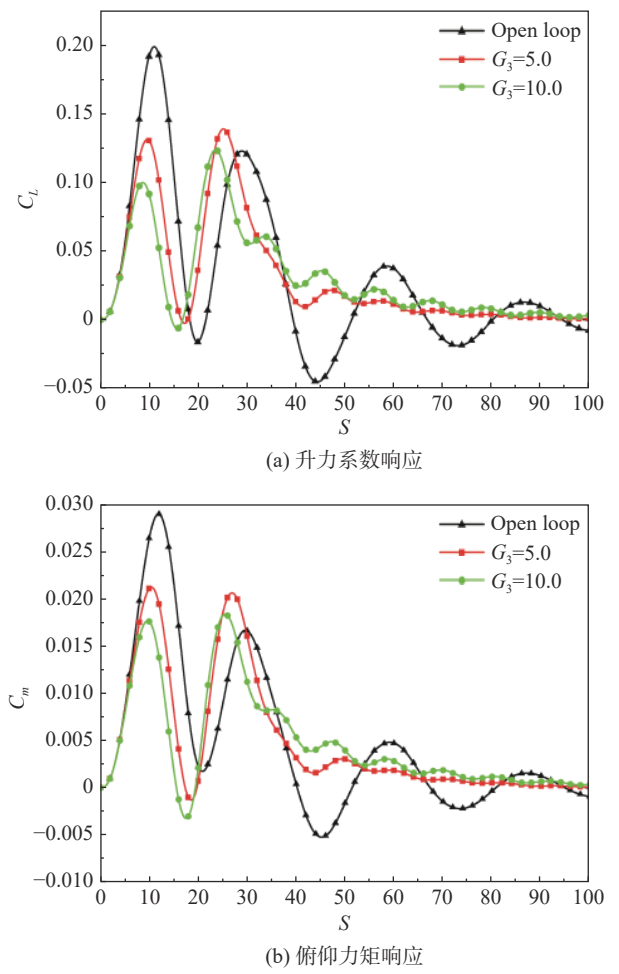
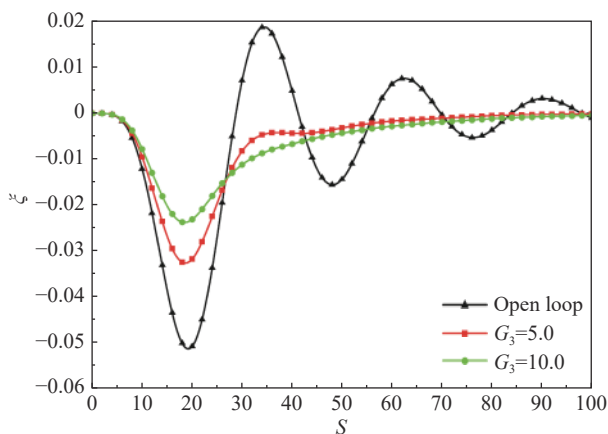
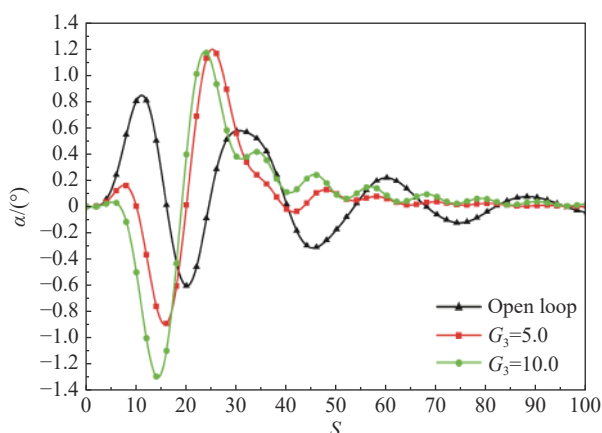


图 12 开环系统和闭环控制系统翼型气动力阵风响应对比

Fig. 12 Comparison of aerodynamic gust responses between open- and closed-loop control systems



(a) 沉浮位移响应

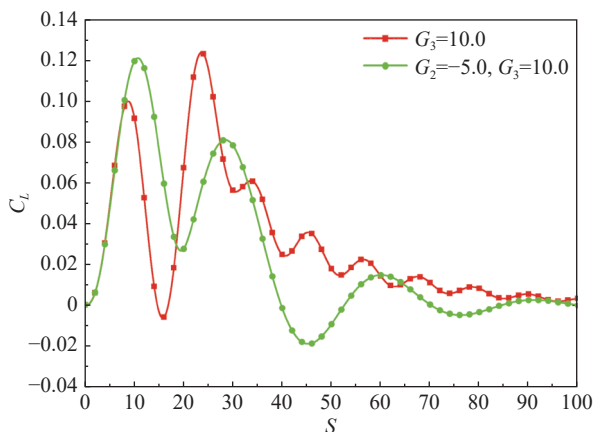


(b) 俯仰角位移响应

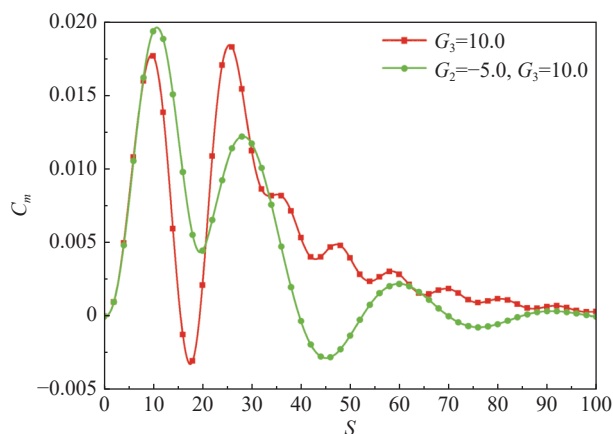
图 13 开环系统和闭环控制系统翼型结构响应对比

Fig. 13 Comparison of structural response between open- and closed-loop control systems

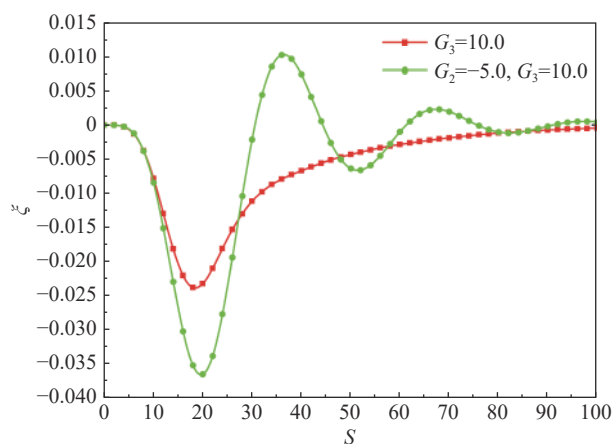
接下来采用 $G_2 = -5.0$ 、 $G_3 = 10.0$ 同时控制翼型的沉浮和俯仰运动。图 14、图 15 分别为 G_2 、 G_3 组合的闭环控制阵风响应结果和仅 G_3 的响应结果对比。增加俯仰控制后，俯仰角位移幅值显著减小，导致阵风作用期间的气动参数峰值高于无俯仰控制情况，但阵风离开翼型后的气动参数极值则显著降低。



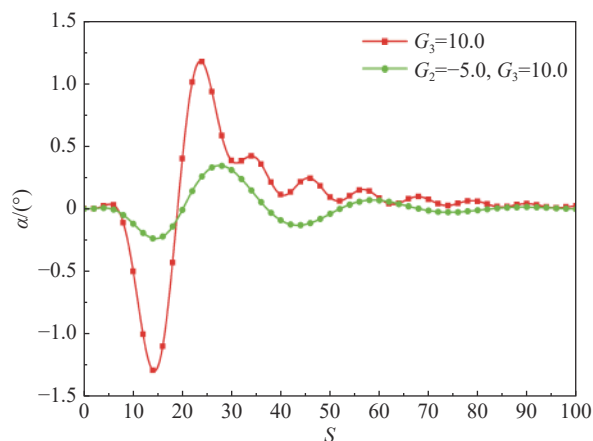
(a) 升力系数减缓对比



(b) 俯仰力矩减缓对比

图 14 $G_2 = -5.0$ 、 $G_3 = 10.0$ 和仅有 $G_3 = 10.0$ 气动力响应对比Fig. 14 Comparison of aerodynamic response between $G_2 = -5.0$, $G_3 = 10.0$ and only $G_3 = 10.0$ 

(a) 沉浮位移响应



(b) 俯仰角位移响应

图 15 $G_2 = -5.0$ 、 $G_3 = 10.0$ 和仅有 $G_3 = 10.0$ 结构响应对比Fig. 15 Comparison of structural response between $G_2 = -5.0$, $G_3 = 10.0$ and only $G_3 = 10.0$

6 结 论

本文基于动态网格系统下非定常 N-S 方程，理论推导出 SVM 阵风模拟的控制方程，发展出基于 SVM

的弹性翼型阵风响应 CFD/CSD 时域耦合算法和基于翼型俯仰控制的阵风减缓模拟方法。算例分析了 NACA0012 刚性、弹性翼型的 One-Minus-Cosine 阵风响应, 计算结果与文献数据吻合; 分析了阵风尺度、流体黏性和结构弹性对 NACA0012 翼型阵风响应的影响; 实现了基于俯仰控制的 NACA64A010 弹性翼型阵风减缓。主要结论如下:

1) 理论推导表明, 传统 FVM 是忽略 SVM 中阵风相关附加源项的一种近似方法, 对于大尺度阵风, 两种方法的计算结果一致, 源项的作用随着阵风尺度的减小而凸显, 理论上 SVM 更为准确;

2) 黏性效应导致 NACA0012 翼型升力系数阵风响应峰值降低, 阵风尺度越大, 升力减小越明显, 黏性同时减弱了 $1c$ 阵风离开翼型后缘时的升力系数波动;

3) 结构弹性引起 NACA0012 翼型俯仰角阵风响应峰值增加, 阵风尺度越大, 升力系数增加越显著;

4) 俯仰控制能够有效减缓 NACA64A010 弹性翼型的阵风载荷, 沉浮速度控制输入量 $G_3 = 10.0$ 时升力系数阵风响应峰值减缓 49.758%, 结合 G_2 、 G_3 则能够同时减缓沉浮和俯仰响应。

参 考 文 献:

- [1] 顾宁. 基于CFD的机翼阵风响应及减缓计算[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2013.
GU N. CFD-based gust response and alleviation research of aircraft wing[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2013 (in Chinese).
- [2] HEINRICH R, REIMER L. Comparison of different approaches for gust modeling in the CFD Code TAU[C]//International Forum on Aeroelasticity & Structural Dynamics, 2013, Bristol, Großbritannien. <https://elib.dlr.de/85834/1/IFASD-2013-Heinrich-36B.pdf>
- [3] TANG L, BAEDER J D. Adaptive Euler simulations of airfoil-vortex interaction[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2007, 53(5): 777–792.
doi: 10.1002/flid.1306
- [4] TANG L, BAEDER J D. A two-step grid redistribution method[J]. *Computers & Fluids*, 2003, 32(3): 323–336.
doi: 10.1016/S0045-7930(01)00092-5
- [5] PARAMESWARAN V, BAEDER J D. Indicial aerodynamics in compressible flow-direct computational fluid dynamic calculations[J]. *Journal of Aircraft*, 1997, 34(1): 131–133.
doi: 10.2514/2.2146
- [6] SITARAMAN J. CFD base unsteady aerodynamic modeling for rotor aeroelastic analysis[D]. University of Maryland, 2003.
- [7] NING GU, ZHILIANG LU, et al. Simulation of viscous flows around a moving airfoil by field velocity method with viscous flux correction[J]. *Advances in Applied Mathematics & Mechanics*, 2012, 4(3): 294–310.
doi: 10.1017/S2070073300001156
- [8] WALES C, JONES D, GAITONDE A. Prescribed velocity method for simulation of aerofoil gust responses[J]. *Journal of Aircraft*, 2014, 52(1): 64–76.
doi: 10.2514/1.C032597
- [9] 赵永辉, 黄锐. 高等气动弹性力学与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [10] BOULBRACHENE K, DE NAYER G, BREUER M. Assessment of two wind gust injection methods: field velocity vs. split velocity method[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2021, 218: 104790.
doi: 10.1016/J.JWEIA.2021.104790
- [11] WALES C, GAITONDE A, JONES D. Reduced order modelling for aeroelastic aerofoil response to a gust[C]//51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Grapevine (Dallas/Ft. Worth Region), Texas. Reston, Virginia: AIAA, 2013: 790.
doi:10.2514/6.2013-790
- [12] 詹浩, 钱炜祺. 薄翼型阵风响应的数值模拟[J]. 航空学报, 2007, 28(3): 527–530.
ZHAN H, QIAN W Q. Numerical simulation of gust response for thin airfoil[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2007, 28(3): 527–530 (in Chinese).
- [13] SINGH R, BAEDER J D. Direct calculation of three-dimensional indicial lift response using computational fluid dynamics[J]. *Journal of Aircraft*, 1997, 34(4): 465–471.
doi: 10.2514/2.2214
- [14] HUNTLEY S J, JONES D, GAITONDE A. 2D and 3D gust response using a prescribed velocity method in viscous flows[C]//46th AIAA Fluid Dynamics Conference, Washington, D. C., Reston, Virginia: AIAA, 2016: 4259.
doi:10.2514/6.2016-4259
- [15] ANN G. A dual-time method for the solution of the 2D unsteady Navier-Stokes equations on structured moving meshes[C]//13th Applied Aerodynamics Conference, San Diego, CA. Reston, Virginia: AIAA, 1995: 1877.
doi:10.2514/6.1995-1877
- [16] SPALART P, ALLMARAS S. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows[C]//30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV. Reston, Virginia: AIAA, 1992: 439.
doi:10.2514/6.1992-439
- [17] DING L, LU Z L, GUO T Q. An efficient dynamic mesh generation method for complex multi-block structured grid[J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 6(1): 120–134.
doi: 10.4208/aamm.2013.m199
- [18] LI H, EKICI K. A novel approach for flutter prediction of pitch-plunge airfoils using an efficient one-shot method[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2018, 82: 651–671.
doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2018.08.012
- [19] 杨超, 主编. 飞行器气动弹性原理[M]. 吴志刚, 万志强, 陈桂彬, 编著. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2011.
- [20] DA RONCH A, TANTAROUDAS N D, TIMME S, et al. Model reduction for linear and nonlinear gust loads analysis[C]//AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 2013.
doi:10.2514/6.2013-1492
- [21] DJAYAPERTAPA L, ALLEN C. Simulation of transonic flutter and active shockwave control[J]. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2004, 14(4): 413–443.
doi: 10.1108/0961553041053223
- [22] DA RONCH A, BADCOCK K, WANG Y, et al. Nonlinear model reduction for flexible aircraft control design[C]//AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Minneapolis, Minnesota. Reston, Virginia: AIAA, 2012: 4404.
doi:10.2514/6.2012-4404
- [23] DJAYAPERTAPA L, ALLEN C B, FIDDES S P. Two-dimensional transonic aeroservoelastic computations in the time domain[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 52(12): 1355–1377.
doi: 10.1002/nme.258

(本文责编: 王颖)